REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

ISSN 2525-5444

SUBVARIEDADES DE ROTAÇÃO EM ESPAÇOS PRODUTO

Samuel Canevari

DMAI/Universidade Federal de Sergipe

scanevari@gmail.com

Resumo

Classificamos as subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$, com curvatura seccional constante e dimensão $m \geq 3$.

Abstract

We classify the rotation submanifolds of $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ with constant sectional curvature and dimension $m \geq 3$.

1 Introdução

Denotamos por $\mathbb{Q}^n_\epsilon$ uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante $\epsilon \in \{-1, 1\}$ e dimensão n. É um fato conhecido que $\mathbb{Q}^n_\epsilon$ é isométrica à esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se $\epsilon = 1$ e ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$ se $\epsilon = -1$, em que $\mathbb{L}^{n+1}$ denota o espaço de Lorentz de dimensão $n + 1$.

A geometria das subvariedades dos espaços produtos $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ tem despertado interesse de vários pesquisadores nos últimos anos. Daniel [5] que, com o intuito de estudar superfícies mínimas em $\mathbb{Q}^2_\epsilon \times \mathbb{R}$, demonstrou um teorema tipo Bonnet para imersões de variedades riemannianas $n-$ dimensionais em $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$. Tal teorema fornece condições necessárias e suficientes para que uma variedade riemanniana n-dimensional possa ser isometricamente imersa em $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$, e essas condições são dadas em termos das primeira e segunda formas fundamentais da imersão e em termos das projeções em TM e em $T^\perp M$ de um campo unitário tangente ao segundo fator de $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$. O resultado de B. Daniel foi generalizado em [7] por J.H.Lira, R.Tojeiro e F.Vitório, que provaram um teorema tipo Bonnet para produtos de duas formas espaciais. Nesse novo resultado, a codimensão da imersão pode ser qualquer e as condições para a existência da imersão são dadas em termos das primeira e segunda formas fundamentais, em termos da conexão em $T^\perp M$ e em termos dos tensores R, S e T definidos pelos autores.

As subvariedades de rotação de $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ foram definidas em [9] em termos de uma curva perfil, (ver seção 3) estendendo a definição dada em [6] para o caso de hipersuperfícies. É um problema interessante classificar as subvariedades de rotação de $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$, com curvatura seccional constante.

Superfícies de rotação com curvatura Gaussiana constante de $\mathbb{Q}^2(\epsilon)\times\mathbb{R}$ foram estudadas em [1] e [2], com ênfase em suas propriedades globais. Os autores mostraram, dentre outras coisas, que uma superfície completa com curvatura Gaussiana constante $c>1$ (respectivamente, $c>0$) de $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$) é necessariamente de rotação, e suas curvas geratrizes foram determinadas explicitamente.

As hipersuperfícies de $\mathbb{Q}^m(\epsilon)\times\mathbb{R}$ com curvatura seccional constante c e dimensão $m\geq 3$ foram classificadas por F.Manfio e R. Tojeiro em [8]. Mostraram dentre outras coisas que, se $m\geq 4$, $\epsilon=1$ e $c\geq 1$ (respectivamente, $\epsilon=-1$ e $c\geq -1$) os únicos exemplos existentes, mesmo localmente, são as de rotação. Além disso, classificaram todas as hipersuperfícies de rotação de $\mathbb{Q}^m(\epsilon)\times\mathbb{R}$, com curvatura seccional constante.

As imersões isométricas $f: M_c^m\to\mathbb{S}^{m+p}\times\mathbb{R}$, $m\geq 3$ e $p\leq m-3$, em que M_c^m denota uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c e dimensão m, foram estudadas em [3]. Foi mostrado que, se $c\geq 1$, as subvariedades de rotação com curvatura seccional constante igual a c aparecem em abundância.

Nesse trabalho, as subvariedades de rotação com curvatura seccional constante foram totalmente classificadas. Tal classificação estende a dada para o caso de hipersuperfícies em [9]. Foi mostrado que subvariedades de rotação de $\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$, com curvatura seccional constante c e dimensão $m\geq 3$, só existem, mesmo localmente, para $c\geq\epsilon$. Além disso, foi dada uma parametrização explícita de tais subvariedades em termos de uma determinada curva perfil.

Antes de terminar esta introdução será descrito o conteúdo de cada seção deste trabalho. Na seção 2 serão introduzidos alguns fatos básicos que serão úteis nas seções seguintes. Na seção 3 serão definidas as subvariedades de rotação de $\mathbb{Q}_\epsilon^n\times\mathbb{R}$, objeto de estudo nesse trabalho. Na quarta e última seção será enunciado e demostrado o principal resultado desse trabalho.

2 Preliminares

Dada uma imersão isométrica $f:\ M^m\to\mathbb{Q}_\epsilon^n\times\mathbb{R}$, seja $\frac{\partial}{\partial t}$ um campo de vetores tangentes unitários no segundo fator de $\mathbb{Q}_\epsilon^n\times\mathbb{R}$. Note que, se $\epsilon=0$, podemos escolher um campo de vetores unitário constante $\frac{\partial}{\partial t}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então um campo de vetores tangentes T a M_c^m e um campo de vetores normais a f são definidos por

$$\frac{\partial}{\partial t}=f_*T+\eta. \tag{2.1}$$

Aqui e no que segue A_η^f é o operador forma de f na direção de η, dado por:

$$\langle A_\eta^f X,Y\rangle=\langle\alpha_f(X,Y),\eta\rangle,\ \forall\ X,Y\in TM.$$

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci para f são, respectivamente (Ver, e.g., [7])

$$R(X,Y)W = (X \wedge Y - \langle Y,T\rangle X \wedge T + \langle X,T\rangle Y \wedge T)W + A^f_{\alpha(Y,W)}X - A^f_{\alpha(X,W)}Y, \quad (2.2)$$

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,W) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,W) = (\langle X,W\rangle\langle Y,T\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,T\rangle)\eta \quad (2.3)$$

e

$$R^\perp(X,Y)\zeta = \alpha(X, A^f_\zeta Y) - \alpha(A^f_\zeta X, Y). \quad (2.4)$$

A equação (2.3) é equivalente a

$$(\nabla_X A^f)(Y,\zeta) - (\nabla_Y A^f)(X,\zeta) = \epsilon\langle \eta,\zeta\rangle (X \wedge Y)T \quad (2.5)$$

em que $(X \wedge Y)W = \langle Y,W\rangle X - \langle X,W\rangle Y$.

Embora isso não irá ser utilizado no que segue, vale a pena mencionar que as equações (2.2) - (2.4) determinam completamente uma imersão isométrica $f: M^m \to \mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ a menos de uma isometria de $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ (Ver Corolário 3 de [7]).

2.1 Tubo Parcial

Seja $g: N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n_\epsilon$ uma imersão isométrica. Suponha que exista um conjunto ortonormal $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ de campos de vetores normais paralelos ao longo de g. Esta hipótese é satisfeita localmente, por exemplo, se g possui fibrado normal plano. Assim, o subfibrado vetorial E de posto k do fibrado normal N^gN de g, gerado por $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$, é paralelo e plano. Sejam $j: \mathbb{Q}^n_\epsilon \to \mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ e $i: \mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ as inclusões canônicas, e $\tilde{j} = i \circ j$, em que $\mathbb{E}^{n+2}$ denota o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$, quando $\epsilon = 1$, ou o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+2}$, quando $\epsilon = -1$. Defina $\tilde{\xi}_i = \tilde{j}_*\xi_i$, $1 \le i \le k$, $\tilde{\xi}_0 = \tilde{g} := \tilde{j} \circ g$ e $\tilde{\xi}_{k+1} = i_*\frac{\partial}{\partial t}$. Então, o subfibrado vetorial $\tilde{E}$ de $N^{\tilde{g}}N$ cuja fibra $\tilde{E}(x)$, em $x \in N^{m-1}$, é gerada por $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_{k+1}$, é também paralelo e plano. Defina uma isometria de fibrados vetoriais $\phi: N^{m-1} \times \mathbb{E}^{k+2} \to \tilde{E}$ por

$$\phi_x(y) := \phi(x,y) = \sum_{i=0}^{k+1} y_i \tilde{\xi}_i, \quad (2.6)$$

para $y = (y_0, y_1, ..., y_{k+1}) \in \mathbb{E}^{k+2}$. Seja

$$f: M^m := N^{m-1} \times I \to \mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$$

dada por

$$\tilde{f}(x,s) := (i \circ f)(x,s) = \phi_x(\gamma(s)) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s)\tilde{\xi}_i(x) \quad (2.7)$$

em que $\gamma: \ I \to \mathbb{Q}^k_\epsilon \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, ..., \ \gamma_k, \ \gamma_{k+1})$, é uma curva regular suave tal que $\epsilon\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + ... + \gamma_k^2 = \epsilon$ e γ_{k+1} possui derivada não nula em todo ponto.

A aplicação $\tilde{f}$ é um *tubo parcial sobre* $\tilde{g}$ *com fibra* γ, no sentido dado em [4]. Geometricamente, $\tilde{f}(M)$ é obtida transportando paralelamente a curva $\phi_x(\gamma(I))$, contida no espaço normal de $\tilde{g}$ em $x \in N^{n-1}$, com respeito à conexão normal de $\tilde{g}$.

Uma condição necessária e suficiente para um ponto $(x, s) \in M^m = N^{m-1} \times \mathbb{R}$ ser regular para f é dada na parte (ii) da Proposição 2.1 abaixo.

A proposição seguinte descreve a diferencial, o espaço normal e a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\tilde{f}$ definida em (2.7). Dados $x \in N^{m-1}$, $X \in T_xN$ e $s \in I$, denote por $X^{\mathcal{H}}$ o único vetor em $T_{(x,s)}M$ tal que $\pi_{1*}X^{\mathcal{H}} = X$ e $\pi_{2*}X^{\mathcal{H}} = 0$, em que $\pi_1 : M^m \to N^{m-1}$ e $\pi_2 : M^m \to I$ são as projeções canônicas.

Proposição 2.1. *[9] São válidas as seguintes afirmações:*
(i) A diferencial de $\tilde{f}$ é dada por

$$\tilde{f}_*(x, s)X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_*(x)(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x))X$$

para todo $X \in T_xN$, em que I é o endomorfismo identidade de T_xN, e

$$\tilde{f}_*(x, s)\frac{\partial}{\partial s} = \phi_x(\gamma'(s)).$$

(ii) A aplicação $\tilde{f}$ (e, portanto, f) é uma imersão em (x, s) se, e somente se,

$$P_s(x) := \gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x) = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))} = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma(s))},$$

em que $\bar{\gamma}(s) = (\gamma_0(s), ..., \gamma_k(s), 0)$, é um endomorfismo inversível de T_xN.
(iii) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x, s), então

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = \tilde{j}_*E(x)^\perp \oplus \phi_x(\gamma'(s)^\perp) \subset N^{\tilde{g}}_x N,$$

em que $E(x)^\perp$ e $\gamma'(s)^\perp$ denotam os complementos ortogonais de $E(x)$ em N^g_xN e de $\gamma'(s)$ em $\mathbb{E}^{k+2}$, respectivamente, e

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = i_*N^f_{(x,s)}M \oplus span\{(\pi \circ \tilde{f})(x, s)\} = i_*N^f_{(x,s)}M \oplus \phi_x(\overline{\gamma}(s)),$$

em que $\pi : \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção canônica.
(iv) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x, s), então

$$A^{\tilde{f}}_\xi(x, s)X^{\mathcal{H}} = (P_s(x)^{-1}A^{\tilde{g}}_\xi(x)X)^{\mathcal{H}}. \tag{2.8}$$

para quaisquer $\xi \in N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$ *e* $X \in T_xN$,

$$A^{\tilde{f}}_{\xi}(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = 0, \ \ se\ \xi \in \tilde{j}_*E(x)^{\perp} \tag{2.9}$$

e

$$A^{\tilde{f}}_{\phi_x(\zeta)}(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\langle \gamma''(s), \zeta\rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle}\frac{\partial}{\partial s}, \ \ se\ \zeta \in \mathbb{E}^{k+2}, \ \langle \zeta, \gamma'(s)\rangle = 0. \tag{2.10}$$

Além disso,

$$A^{f}_{\zeta}(x,s) = A^{\tilde{f}}_{i_*\zeta}(x,s)$$

para todo $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$.

No caso em que a imersão isométrica $\tilde{f}$, dada por (2.7) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n_\epsilon$ com fibrado normal plano, com $k = n - m + 1$, podemos reescrever as afirmações da Proposição 2.1 como segue.

Corolário 2.2. *Nas condições acima, são válidas as seguintes afirmações:*
(i) A diferencial de $\tilde{f}$ *é dada por*

$$\tilde{f}_*(x,s)X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_*(x)(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{n-m+1}\gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x))X \tag{2.11}$$

para todo $X \in T_xN$, *em que* I *é o endomorfismo identidade de* T_xN, *e*

$$\tilde{f}_*(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = \phi_x(\gamma'(s)). \tag{2.12}$$

(ii) A aplicação $\tilde{f}$ *(e, portanto,* f*) é uma imersão em* (x,s) *se, e somente se,*

$$P_s(x) := \gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{n-m+1}\gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x) = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\overline{\gamma}(s))} = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma(s))}, \tag{2.13}$$

em que $\overline{\gamma}(s) = (\gamma_0(s), ..., \gamma_{n-m+1}(s), 0)$, *é um endomorfismo inversível de* T_xN.
(iii) Se $\tilde{f}$ *é uma imersão em* (x,s), *então*

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = \phi_x(\gamma'(s)^{\perp}) \subset N^{\tilde{g}}_xN. \tag{2.14}$$

(iv) Se $\tilde{f}$ *é uma imersão em* (x,s), *então*

$$\alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x)X, Y) - \frac{\langle \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x)X, Y), \phi_x(\gamma'(s))\rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle}\phi_x(\gamma'(s)). \tag{2.15}$$

e $\alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s}) = 0$, *para quaisquer* $X, Y \in T_x N$, *e*

$$\alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) = \phi_x(\gamma''(s)).\alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\phi_x(\gamma''(s))}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle}. \tag{2.16}$$

Demostração: Os itens (i), (ii) e (iii) seguem diretamente da Proposição 2.1. Para provarmos o item (iv), observe que, para qualquer $\xi \in N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \xi \rangle &= \langle A^{\tilde{f}}_{\xi} X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \rangle_{\tilde{f}} = \langle \tilde{f}_* A^{\tilde{f}}_{\xi} X^{\mathcal{H}}, \tilde{f}_* Y^{\mathcal{H}} \rangle \overset{(2.8),(2.11)}{=} \\ &= \langle \tilde{g}_* A^{\tilde{g}}_{\xi} X, \tilde{g}_* P_s(x) Y \rangle = \langle A^{\tilde{g}}_{\xi} X, P_s(x) Y \rangle_{\tilde{g}} \\ &= \langle \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x) X, Y), \xi \rangle, \end{aligned}$$

e (2.15) segue de (2.14). Além disso,

$$\langle \alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}), \phi_x(\zeta) \rangle = \langle A^{\tilde{f}}_{\phi_x(\zeta)} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle \overset{(2.10)}{=} \langle \gamma''(s), \zeta \rangle$$

se $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$, $\langle \zeta, \gamma'(s) \rangle = 0$, e (2.16) segue. ∎

Observação 2.3. Decorre imediatamente do Corolário 2.2 que, se $\{X_1, \ ..., \ X_{m-1}\}$ é uma base ortonormal de $T_x N^{m-1}$ de direções principais de $\tilde{g}$, então $\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, X_1^{\mathcal{H}}, \ ..., X_{m-1}^{\mathcal{H}} \right\}$ é uma base ortogonal de $T^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$ de direções principais de $\tilde{f}$.

3 Subvariedade de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Nesta seção definimos as subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ com curva de perfil. Tal seção é baseada em [9].

Sejam $(x_0, ..., x_{n+1})$ coordenadas canônicas em $\mathbb{E}^{n+2}$ com respeito às quais a métrica de $\mathbb{E}^{n+2}$ é escrita como

$$ds^2 = \epsilon dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_{n+1}^2$$

Considere $\mathbb{E}^{n+1}$ como

$$\mathbb{E}^{n+1} = \{(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+2} : x_{n+1} = 0\}$$

e

$$\mathbb{Q}^n_\epsilon = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{E}^{n+1} : \epsilon x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = \epsilon\} \ (x_0 > 0 \, \mathrm{se} \, \epsilon = -1).$$

Seja P^{n-m+3} um subespaço de $\mathbb{E}^{n+2}$ de dimensão $n-m+3$ que contém os vetores e_0 e e_{n+1}, em que $\{e_0, ..., e_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{E}^{n+2}$. Então

$$(\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}) \cap P^{n-m+3} = \mathbb{Q}^{n-m+1}_\epsilon \times \mathbb{R}.$$

Denote por $\mathcal{I}$ o grupo de isometrias em $\mathbb{E}^{n+2}$ que fixa os pontos de um subespaço $P^{n-m+2} \subset P^{n-m+3}$ que contém a direção e_{n+1}. Considere uma curva regular γ em $\mathbb{Q}^{n-m+1}_\epsilon \times \mathbb{R} \subset P^{n-m+3}$ situada em um dos dois hiperplanos de P^{n-m+3} determinados por P^{n-m+2}.

Definição 3.1. Uma subvariedade de rotação em $\mathbb{Q}^n_\epsilon \times \mathbb{R}$ com curva geratriz γ e eixo P^{n-m+2} é a órbita de γ sob a ação de $\mathcal{I}$.

Segue imediatamente da definição acima que tal variedade de rotação possui dimensão m.

Suponhamos que P^{n-m+3} seja gerado por $e_0, e_m, ..., e_{n+1}$. No caso $\epsilon = 1$ suponha, também, que P^{n-m+2} seja gerado por $e_m, ..., e_{n+1}$. Escrevendo a curva γ como

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)e_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma(s)e_{i-m+1} + h(s)e_{n+1}, \tag{3.1}$$

com $\sum_{i=0}^{n-m+1} \gamma_i^2 = 1$, a subvariedade de rotação, de dimensão m, em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2}, pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s,t) = (\gamma_0(s)\varphi_1(t), ..., \gamma_0(s)\varphi_m(t), \gamma_1(s), ..., \gamma_{n-m+1}(s), h(s)), \tag{3.2}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Para $\epsilon = -1$, temos três possibilidades distintas a considerar, conforme P^{n-m+2} seja Lorentziano, Riemanniano ou degenerado, e a subvariedade de rotação será denominada, respectivamente, do tipo *esférico*, *hiperbólico* ou *parabólico*. No primeiro caso, podemos supor que P^{n-m+2} seja gerado por $e_0, e_{m+1}, \cdots, e_{n+1}$, e que γ seja dada por (3.1), com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$. Então, a subvariedade de rotação de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2} pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s,t) = (\gamma_0(s), \gamma_1(s)\varphi_1(t), \cdots, \gamma_1(s)\varphi_m(t), \gamma_2(s), \cdots, \gamma_{n-m+1}(s), h(s)), \tag{3.3}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

No segundo caso, podemos supor que P^{n-m+2} seja gerado por $e_m, \cdots, e_{n+1}$. Então, com a curva γ também dada por (3.1) com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$, a parametrização é também dada por (3.3), sendo que neste caso $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{H}^{m-1} \subset \mathbb{L}^m$.

Finalmente, quando P^{n-m+2} é degenerado, escolha uma base pseudo-ortonormal

$$\hat{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_0 + e_n),\ \hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_n),\ \hat{e}_j = e_j, \tag{3.4}$$

para $j \in \{1, \cdots, n-1, n+1\}$, e suponha que P^{n-m+2} seja gerado por $\hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_{n+1}$. Note que $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_0 \rangle = 0 = \langle \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle$ e $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_n \rangle = 1$. Então, podemos parametrizar γ por

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)\hat{e}_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1}(s)\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1}, \tag{3.5}$$

com $2\gamma_0(s)\gamma_{n-m+1}(s) + \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i^2(s) = -1$, e a parametrização da correspondente subvariedade de rotação nas coordenadas pseudo-ortonormais escolhidas é

$$\tilde{f}(s,t) = \left(\gamma_0, \gamma_0 t_1, \cdots, \gamma_0 t_{m-1}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-m}, \gamma_{n-m+1} - \frac{\gamma_0}{2}\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2, h\right), \tag{3.6}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ parametriza $\mathbb{R}^{m-1}$, $\gamma_i = \gamma_i(s)$, $0 \leq i \leq n-m+1$, e $h = h(s)$.

Temos o seguinte teorema de caracterização das subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$:

Teorema 3.2. *[9] Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, uma imersão isométrica tal que o campo de vetores T, definido em (2.1), não se anule em nenhum ponto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) f é uma subvariedade de rotação cuja geratriz é uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$;
(ii) existe um campo de vetores normais ζ ao longo de f tal que

$$A_\xi^f X = < \zeta, \xi > X \tag{3.7}$$

para quaisquer $X \in \{T\}^\perp$ e $\xi \in \Gamma(N^f M)$.

4 Principais resultados

Nesta seção provaremos os principais resultados deste trabalho, a saber, obtivemos uma classificação completa de todas subvariedades de rotação com curvatura seccional constante c e dimensão m, $m \geq 3$, de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 4.1. *Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ uma subvariedade de rotação com curvatura seccional constante c e dimensão $m \geq 3$. Então $c \geq \epsilon$. Além disso:*
(i) se $\epsilon = 1$, então f é parametrizada por (3.2), com $\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}s)$. Ademais, $c = 1$, se, e somente se, $h(s)$, na parametrização acima, é constante.
(ii) se $\epsilon = -1$ e $c \in (-1, 0)$, então uma das possibilidades ocorre:
(a) f é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por (3.3) com $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{senh}(\sqrt{-c}s)$;
(b) f é uma subvariedade de rotação do tipo hiperbólico que pode ser parametrizada por (3.3) com $\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\cosh(\sqrt{-c}s)$;
(c) f é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico que pode ser parametrizada por (3.6) com $\gamma_0 = exp(\sqrt{-c}s)$.
Outrossim, $c = -1$ se, e somente se, $h(s)$, nas parametrizações acima, é constante.
(iii) se $\epsilon = -1$ e $c = 0$, então uma das possibilidades ocorre:
(a) f é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por (3.3) com $\gamma_1 = \pm s$;
(b) f é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico que pode ser parametrizada por (3.6) com $\gamma_0 = k$, k constante.
(iv) se $\epsilon = -1$ e $c > 0$, então f é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por (3.3) com $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}s)$.

Demostração: Inicialmente vamos determinar os possíveis valores de c para que a subvariedade de rotação $f : M^m_c \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ possua curvatura seccional constante c. Seja T o campo definido em (2.1). Para cada $x \in M$, seja $\{\xi_1, \cdots, \xi_{n-m+1}\}$ uma base ortonormal de $N^f_x M$. Temos, pelo Teorema 3.2, que

$$A^f_{\xi_r}T = \lambda_r T \ \text{ e } \ A^f_{\xi_r}X = \mu_r X, \ \forall X \in \{T\}^\perp, \tag{4.1}$$

em que, $1 \leq r \leq n - m + 1$. Agora a Equação de Gauss (2.2), para $X, Y, W \in \{T\}^\perp$ ortonormais, com $Y = W$, implica em:

$$c - \epsilon = \sum_{r=1}^{n-m+1} \mu_r^2 \tag{4.2}$$

e, para $X = T$ e $Y = W \in \{T\}^\perp$, nos dá que:

$$c - \epsilon = \sum_{r=1}^{n-m+1} \lambda_r\mu_r + |T|^2 \tag{4.3}$$

Conclui-se de (4.2) e de (4.3) que $c \geq \epsilon$ e, se $c = \epsilon$, T é um campo de vetores nulo. Portanto, se $c = \epsilon$, então $f(M^m_\epsilon)$ está contido em uma fatia $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$. É fácil ver que as fatias $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, são parametrizadas como na seção 3, com a ultima coordenada constante.

Afirmamos que $\tilde{f} := i \circ f$, em que $i : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ é a inclusão canônica, pode ser vista como um tubo parcial sobre uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$ umbílica e com fibra $\gamma : I \to \mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n-m+3}$, $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-m+1}, \gamma_{n-m+2})$. Além disso, o operador forma $A^{\tilde{g}}$ de $\tilde{g} := j \circ g$, em que $j : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \to \mathbb{E}^{n+1}$ é a inclusão canônica, é tal que

$$A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma})} = -\beta I, \; A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma')} = -\beta' I \;\text{ e }\; A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma'')} = -\beta'' I, \tag{4.4}$$

em que, $\beta(s) = \gamma_1(s)$, quando $\epsilon = -1$ e a subvariedade de rotação é do tipo esférico, e $\beta(s) = \gamma_0(s)$ nos demais casos, ϕ é a isometria que define o tubo e $\bar{\gamma}(s) = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-m+1}, 0)$.

De fato, para $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$ e f do tipo hiperbólico, temos que a subvariedade de rotação é parametrizada por (3.2), que pode ser escrita como

$$\tilde{f}(s,t) = \gamma_0(s)\hat{g}(t) + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1}(s) e_i + h(s) e_{n+1}, \tag{4.5}$$

em que $\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) e_i$, para $t = (t_1, \cdots, t_{m-1})$, é uma imersão isométrica de $\mathbb{Q}^{m-1}(\epsilon)$ em $\mathbb{Q}^n(\epsilon)$ totalmente geodésica. Seja $\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_m, \cdots, , \tilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n-m+3}$. Para cada $t \in \mathbb{Q}^{m-1}_\epsilon$, defina uma isometria $\phi_t : \mathbb{E}^{n-m+3} \to \mathbb{E}^{n-m+3}$ por $\phi_t(\tilde{e}_0) = \hat{g}(t)$, $\phi_t(\tilde{e}_i) = e_i$, $m \leq i \leq n+1$. Defina uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n-m+3}$ por $\gamma(s) = \gamma_0 \tilde{e}_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1} \tilde{e}_i + h(s) \tilde{e}_{n+1}$, com $\epsilon\gamma_0 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = \epsilon$. Agora, $\tilde{f}(s,t) = \phi_t(\gamma(s))$. Agora a segunda forma fundamental $\alpha^{\tilde{g}}$ da imersão isométrica $\tilde{g} := j \circ \hat{g}$, é dada por

$$\alpha^{\tilde{g}} = -\langle \cdot, \cdot \rangle \phi_t(\tilde{e}_0). \tag{4.6}$$

Donde segue (4.4). Isto prova a afirmação para $\epsilon = 1$ e $\epsilon = -1$ e f do tipo hiperbólico.

Suponha que $\epsilon = -1$ e f é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico, parametrizada por (3.6). Tal parametrização pode ser escrita como:

$$\tilde{f}(s,t) = \gamma_0 \hat{g}(t) + \sum_{i=m}^{n} \gamma_i \hat{e}_i + h(s) \hat{e}_{n+1}$$

em que

$$\hat{g}(t) = \hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} t_i \hat{e}_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2 \right) \hat{e}_n.$$

Note que $\hat{g}$ define uma imersão isométrica de $\mathbb{R}^{m-1}$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ (de fato, $\hat{g}(\mathbb{R}^{m-1}) \subset \mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, em que $\mathbb{V}^{n+1}$ é o cone de luz), e que $\hat{g}, \hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_n, \hat{e}_{n+1}$ é uma base pseudo-ortonormal de $N^{\hat{g}}\mathbb{R}^{m-1}$, com $\langle \hat{g}, \hat{g}\rangle = 0 = \langle \hat{e}_n, \hat{e}_n\rangle$, $\langle \hat{g}, \hat{e}_n\rangle = 1$ e $\{\hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_{n-1}, \hat{e}_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $span\{\hat{g}, \hat{e}_n\}^{\perp}$.

Seja $\{e_0, e_m, \cdots, e_n, e_{n+1}\}$ uma base pseudo ortonormal de $\mathbb{L}^{n-m+3}$ com $\langle e_0, e_0\rangle = 0 = \langle e_n, e_n\rangle$, $\langle e_0, e_n\rangle = 1$ e $\{e_m, \cdots, e_{n-1}, e_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $span\{e_0, e_n\}^{\perp}$. Para cada $t \in \mathbb{R}^{m-1}$ defina uma isometria $\phi_t : \mathbb{L}^{n-m+3} \to N^{\hat{g}}\mathbb{R}^{m-1}$ por $\phi_t(e_0) = \hat{g}$, $\phi_t(e_n) = \hat{e}_n$, $\phi_t(e_i) = \hat{e}_i$, $m \leq i \leq n-1$ e $\phi_t(e_{n+1}) = \hat{e}_{n+1}$. Defina uma curva $\gamma : I \to \mathbb{H}^{n-m+1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^{n-m+3}$ por $\gamma(s) = \gamma_0 e_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1}$, com $2\gamma_0\gamma_{n-m+1} + \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i^2 = -1$. Observe que $\tilde{f}(s,t) = \phi_t(\gamma(s))$. Para qualquer $s_0 \in I$ fixo, seja $g : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{H}^n$ dado por $g = \hat{g} - \dfrac{1}{2}\hat{e}_n$. Então g (horosfera) define uma imersão umbílica com mesmo espaço normal, em $\mathbb{L}^{n+2}$, que $\hat{g}$, em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}^{m-1}$. Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(s,t) &= \phi_t(\gamma(s)) = \gamma_0\hat{g} - \frac{\gamma_0}{2}\hat{e}_n + \frac{\gamma_0}{2}\hat{e}_n + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1}\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1} \\
&= \gamma_0 g + \sum_{i=m}^{n-1} \gamma_{i-m+1}\hat{e}_i + \left(\gamma_{n-m+1} + \frac{\gamma_0}{2}\right)\hat{e}_n + h(s)\hat{e}_{n+1}
\end{aligned}$$

Agora, observe que o espaço normal a $\tilde{g} := j \circ g$, em $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, é gerado por

$$N_t^{\tilde{g}}\mathbb{R}^{m-1} = span\left\{\hat{g}, \hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_n\right\}.$$

Daí, temos que,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{g}\rangle \hat{e}_n + \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{e}_n\rangle \hat{g} + \sum_{i=m}^{n-1} \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_i\rangle e_i. \tag{4.7}$$

Mas, para quaisquer $X, Y \in T_t\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), \hat{e}_n\rangle = X\langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, \hat{e}_n\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, \hat{e}_n\rangle = 0$$

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), \hat{g}\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g} Y, \hat{g}\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, \hat{g}\rangle - \langle \tilde{g} Y, \hat{g}_* X\rangle = -\langle \hat{g} Y, \hat{g}_* X\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

e

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), e_i\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, e_i\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, e_i\rangle = 0,\ m \leq i \leq n-1.$$

Logo,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle \cdot,\cdot\rangle \hat{e}_n.$$

Donde segue (4.4).

Por sua vez, suponha que $\epsilon = -1$ e f seja uma subvariedade de rotação do tipo esférico parametrizada por (3.3). Observe que (3.3) pode ser escrita como:

$$\tilde{f}(t,s) = \gamma_0 e_0 + \gamma_1 \hat{g}(t) + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1},$$

em que

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) e_i,$$

para $t = (t_1, \cdots, t_{m-1})$, é um imersão isométrica de $\mathbb{R}^{m-1}$ em $\mathbb{S}^n$. Seja $\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_m, \cdots, , \tilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{L}^{n-m+3}$. Para cada $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, defina uma isometria $\phi_t : \mathbb{L}^{n-m+3} \to \mathbb{L}^{n-m+3}$ por $\phi_t(\tilde{e}_0) = e_0$, $\phi_t(\tilde{e}_1) = \hat{g}(t)$ e $\phi_t(\tilde{e}_i) = e_i$, $m+1 \leq i \leq n+1$. Defina uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-m+3}$ por $\gamma(s) = \gamma_0 \tilde{e}_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1} \tilde{e}_i + h(s)\tilde{e}_{n+1}$, com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$. Agora, $\tilde{f}(s,t) = \phi_t(\gamma(s))$. Para qualquer $s_0 \in I$ fixo, seja $g : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{H}^n$ dado por $g(t) = 2e_0 + \hat{g}(s)$. Então g define uma imersão isométrica umbílica com mesmo espaço normal, em $\mathbb{L}^{n+2}$, que $\hat{g}$, em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}^{m-1}$. Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t,s) &= \phi_t(\gamma(s)) = \gamma_0 e_0 + 2\gamma_1 e_0 - 2\gamma_1 e_0 + \gamma_1 \hat{g} + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1} \\
&= (\gamma_0 - 2\gamma_1) e_0 + \gamma_1 g(t) + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1}
\end{aligned}$$

Agora, observe que o espaço normal a $\tilde{g} := j \circ g$, em $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, é gerado por

$$N_t^{\tilde{g}} \mathbb{R}^{m-1} = span\left\{e_0, \hat{g}, e_{m+1}, \cdots, e_n\right\}.$$

Daí, temos que

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_0\rangle e_0 + \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{g}\rangle \hat{g} + \sum_{i=m+1}^{n} \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_i\rangle e_i.$$

Mas, para quaisquer $X, Y \in T_t\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), e_0\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, e_0\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, e_0\rangle = 0,$$

$$\langle\alpha^{\tilde{g}}(X,Y),\hat{g}\rangle = \langle\tilde{\nabla}_X\tilde{g}_*Y,\hat{g}\rangle = X\langle\tilde{g}_*Y,\hat{g}\rangle - \langle\tilde{g}_*Y,\hat{g}_*X\rangle = -\langle\tilde{g}_*Y,\tilde{g}_*X\rangle = -\langle X,Y\rangle$$

e

$$\langle\alpha^{\tilde{g}}(X,Y),e_i\rangle = \langle\tilde{\nabla}_X\tilde{g}_*Y,e_i\rangle = X\langle\tilde{g}_*Y,e_i\rangle = 0,\ m+1\leq i\leq n.$$

Logo,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle\cdot,\cdot\rangle\hat{g} = -\langle\cdot,\cdot\rangle\phi_t(\tilde{e}_1).$$

Contudo, a afirmação fica provada.

Agora, sejam $\{X_1,...,X_{m-1}\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial s},\frac{X_1^{\mathcal{H}}}{\|X_1^{\mathcal{H}}\|},...,\frac{X_{m-1}^{\mathcal{H}}}{\|X_{m-1}^{\mathcal{H}}\|}\right\}$ bases ortonormais de $T_t\mathbb{S}^{m-1}$ e $T_{(s,t)}M$, respectivamente, em que $X_i^{\mathcal{H}}$ é o levantamento horizontal de X_i, para todo $1\leq i\leq m-1$. Supondo que a curva γ seja parametrizada pelo comprimento de arco, segue de (2.8) e (2.10) que

$$\alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial s}) = \phi_x(\gamma''(s)),$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}},X_j^{\mathcal{H}}) = -\alpha^{\tilde{g}}(A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i,X_j) + < \alpha^{\tilde{g}}(A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i,X_j),\phi_x(\gamma'(s)) > \phi_x(\gamma'(s))\\
= \ & \beta(s)[\alpha^{\tilde{g}}(X_i,X_j) - < \alpha^{\tilde{g}}(X_i,X_j),\phi_x(\gamma'(s)) > \phi_x(\gamma'(s))]\\
= \ & \beta(s)\langle X_i,X_j\rangle[\alpha^{\tilde{g}}(X_i,X_j) + \beta'(s)\phi_x(\gamma'(s))]
\end{aligned}$$

e

$$\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2 = < \tilde{f}_*X_i^{\mathcal{H}},\tilde{f}_*X_i^{\mathcal{H}} >_{\tilde{f}} = < A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i, A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i >_{\tilde{g}} = \beta^2(s),$$

para todo $1\leq i\leq m-1$ e $s\in I$.

Contudo, segue da Equação de Gauss para a imersão isométrica $\tilde{f}$ que,

$$\begin{aligned}
K_M\left(\frac{X_i^{\mathcal{H}}}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|},\frac{X_j^{\mathcal{H}}}{\|X_j^{\mathcal{H}}\|}\right) &= \frac{< \alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}},X_i^{\mathcal{H}}),\alpha^{\tilde{f}}(X_j^{\mathcal{H}},X_j^{\mathcal{H}}) >}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2\|X_j^{\mathcal{H}}\|^2}\\
= \ & \frac{\langle\alpha^{\tilde{g}}(X_i,X_i)+\beta'(s)\phi_x(\gamma'(s)),\alpha^{\tilde{g}}(X_j,X_j)+\beta'(s)\phi_x(\gamma'(s))\rangle}{\beta^2(s)}\\
= \ & \frac{a-\beta'^2(s)}{\beta^2(s)}
\end{aligned}$$

e

$$K_M\left(\frac{X_i^{\mathcal{H}}}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{< \alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_i^{\mathcal{H}}), \alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) >}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2}$$
$$= -\frac{\beta''}{\beta}$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq m-1$, em que $a = 1$ quando $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$ e f é do tipo esférico, $a = 0$ quando $\epsilon = -1$ e f é do tipo parabólico e $a = -1$ quando $\epsilon = -1$ e f é do tipo hiperbólico. Logo, M^m tem curvatura seccional constante c se, e somente se,

$$\beta'(s)^2 + c\beta(s)^2 = a. \tag{4.8}$$

Note que $-\dfrac{\beta''(s)}{\beta(s)} = c$, ou equivalentemente,

$$\beta''(s) + c\beta(s) = 0, \tag{4.9}$$

segue derivando (4.8). Para finalizar a prova, basta integrar as equações (4.9) e (4.8). Para o caso $\epsilon = 1$, temos que $c \geq 1$. Daí, segue de (4.9) que

$$\beta(s) = \gamma_0(s) = A\cos(\sqrt{c}s) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s) \tag{4.10}$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ constantes. Substituindo (4.10) em (4.8), obtemos que

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{c}.$$

Desta forma podemos tomar $A = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}\,\theta_0$ e $B = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\cos\theta_0$. para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\gamma_0(s) = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}\,\theta_0\cos(\sqrt{c}s) + \frac{1}{\sqrt{c}}\cos\theta_0\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s) = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s + \theta_0).$$

Substituindo s por $s - \dfrac{\theta_0}{\sqrt{c}}$, podemos supor que $\theta_0 = 0$. Logo, $\gamma_0(s) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s)$ e o item (i) do teorema fica provado. Os demais casos são análogos. ∎

Referências

[1] Juan A. Aledo, José M. Espinar, and José A. Gálvez, *Complete surfaces of constant curvature in $H^2\times\mathbb{R}$ and $S^2\times\mathbb{R}$*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 347–363. MR 2321892 (2008f:53075)

[2] ———, *Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Height estimates and representation*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **38** (2007), no. 4, 533–554. MR 2371944 (2008k:53121)

[3] Samuel Canevari and Ruy Tojeiro, *Isometric immersions of space forms into $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$*, In preparation (2016).

[4] Sheila Carter and Alan West, *Partial tubes about immersed manifolds*, Geom. Dedicata **54** (1995), no. 2, 145–169. MR 1326059 (96g:53009)

[5] Benoît Daniel, *Isometric immersions into $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 12, 6255–6282. MR 2538594 (2010g:53107)

[6] Franki Dillen, Johan Fastenakels, and Joeri Van der Veken, *Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$*, Note Mat. **29** (2009), no. 1, 41–54. MR 2779904 (2012b:53098)

[7] J. H. Lira, R. Tojeiro, and F. Vitório, *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), no. 5, 469–479. MR 2738866 (2011i:53090)

[8] Fernando Manfio and Ruy Tojeiro, *Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$*, Illinois J. Math. **55** (2011), no. 1, 397–415 (2012). MR 3006694

[9] Bruno Mendonça and Ruy Tojeiro, *Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$*, Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 400–428. MR 3176148