Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v11i1.23041

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA OBTENÇÃO DA FÓRMULA POSICIONAL DE RECORRÊNCIAS LINEARES HOMOGÊNEAS DE QUARTA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

AN ALTERNATIVE METHOD FOR OBTAINING THE CLOSED-FORM FORMULA OF FOURTH-ORDER HOMOGENEOUS LINEAR RECURRENCES WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Rivaldo Bastos Melo
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
rivaldobastos55@gmail.com
Carlos Eduardo Soares de Maria
Instituto Federal do Piauí - IFPI
eduardo.soares@ifpi.edu.br
Davi Ribeiro dos Santos
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
davi_ribeiro@uvanet.br
Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
edvalter_silva@uavnet.br

Comunicado por M. Alegri

Resumo

As sequências numéricas ocupam um papel central na matemática, sendo fundamentais para a modelagem de fenômenos naturais, a análise de algoritmos e o desenvolvimento de modelos matemáticos mais complexos. Nesse contexto, a obtenção de soluções analíticas, especialmente por meio de fórmulas fechadas, reveste-se de particular importância, pois possibilita o cálculo exato dos termos de uma sequência, superando as limitações impostas por métodos numéricos aproximativos. Diante disso, este artigo apresenta um método alternativo para a determinação da fórmula posicional de recorrências lineares homogêneas de quarta ordem com coeficientes constantes. Como aplicação dos resultados obtidos, propõe-se uma generalização da sequência de Fibonacci, a qual evidencia tanto a eficácia quanto a flexibilidade do método proposto, além de reforçar a importância do estudo teórico das recorrências na compreensão e generalização de padrões matemáticos clássicos.

Palavras-chave: Recorrências lineares homogêneas; fórmula posicional; generalização sequência de Fibonacci; equações de quarta ordem.

Abstract

Numerical sequences play a central role in mathematics, being fundamental to the modeling of natural phenomena, the analysis of algorithms, and the development of more complex mathematical models. In this context, obtaining analytical solutions-especially through closed-form expressions-is of particular importance, as it allows for the exact computation of sequence terms, thus overcoming the limitations inherent in approximate numerical methods. In light of this, the present article introduces an alternative method for determining the closed-form expression of fourth-order linear homogeneous recurrences with constant coefficients. As an application of the proposed method, a generalization of the Fibonacci sequence is presented, demonstrating both the effectiveness and flexibility of the approach, while also highlighting the relevance of the theoretical study of recurrences in understanding and extending classical mathematical patterns.

Keywords: Homogeneous linear recurrences; positional formula; generalization of the Fibonacci sequence; fourth-order equations.

1 Introduction

Ao longo da história, o uso de sequências numéricas desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento tecnológico da humanidade. De acordo com Hobold e Santos [2], há evidências de que povos como os egípcios e babilônios já buscavam entender esses fenômenos. No começo, eles tentaram identificar padrões, como o ciclo das cheias dos rios e outros eventos naturais que eram fundamentais para a agricultura e para a manutenção da vida.

Na natureza, também podemos observar padrões notáveis, como o caso das espirais nas conchas de algumas espécies de caracóis, que seguem a sequência de Fibonacci, também conhecida como espiral de ouro. Além disso, a estrutura da nossa árvore genealógica segue um padrão sequencial: temos dois pais, quatro avós, oito bisavós, e assim por diante. As sequências podem assumir diversas formas, cada uma com diferentes métodos para gerar seus termos. Entre elas, destaca-se o conceito de recorrências. A grosso modo, uma recorrência é uma sequência em que, a partir de valores iniciais conhecidos, os termos subsequentes são determinados por uma relação que envolve esses valores anteriores.

Um exemplo de recorrência é a Progressão Aritmética (PA), onde o primeiro termo é conhecido e, a partir dele, os termos seguintes são obtidos pela soma do termo anterior com uma constante. Embora as recorrências sejam extremamente úteis, elas podem apresentar certa dificuldade quando se precisa calcular um termo em uma posição elevada. O processo torna-se trabalhoso e muitas vezes impraticável, pois exige o retorno aos termos anteriores conhecidos para calcular o valor desejado. Por esse motivo, é fundamental encontrar um método eficiente, uma fórmula que, conhecendo a posição do termo, permita calcular seu valor diretamente.

De acordo com Muniz Neto [5], em Combinatória, é frequente que a abordagem analítica para a resolução de problemas recursivos envolva a tarefa de determinar fórmulas explícitas para sequências que atendem a certas relações de recorrência. Esse tipo de modelagem é uma ferramenta essencial para compreender e resolver diferentes questões dentro desse campo, permitindo a identificação de padrões e soluções generalizadas para problemas complexos.

Assim sendo, esse artigo apresenta um método alternativo para a obtenção da fórmula posicional de recorrências lineares homogêneas de quarta ordem com coeficientes constantes. O trabalho detalha o procedimento para a resolução dessas recorrências. A obtenção de soluções analíticas por meio de fórmulas fechadas se torna ainda mais relevante, pois garante resultados exatos, em contraste com os métodos numéricos, que podem introduzir imprecisões dependendo do número de iterações ou da precisão das casas decimais utilizadas.

Na última seção deste trabalho, como aplicação do método proposto, será apresentada a solução de um problema que pode ser interpretado como uma generalização da sequência de Fibonacci. Essa extensão tem como objetivo expandir os conceitos fundamentais da sequência original para um contexto mais abrangente, possibilitando a identificação de novos padrões e relações entre os termos.

2 Equação polinomial de ordem 4

Nesta seção, será apresentado um método para a resolução de equações polinomiais de quarta ordem, conforme proposto por Sena Filho [8]. Esse método foi revisado e reescrito no trabalho de Sena Filho e Nascimento [9], no qual os autores ofereceram uma exposição mais detalhada de cada uma das etapas envolvidas no processo. Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função polinomial, de ordem 4, onde $P(x) = x^4 + Kx^3 + Mx^2 + Rx + L$, com $K, M, R, L \in \mathbb{C}$. O polinômio P é dito especial se os seus coeficientes cumprem a seguinte igualdade.

$$LK^2 = R^2 \tag{2.1}$$

Teorema 2.1 (Sena Filho e Nascimento [9]). *Seja* $P(x) = x^4 + Kx^3 + Mx^2 + Rx + L$ *uma função polinomial do quarto grau, com coeficientes complexos, especial. Então,*

a) Se $R = 0$ *e* $L = 0$*, as raízes do polinômio* P *são:*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4M}}{2} \quad e \quad x_4 = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4M}}{2}$$

b) Se $R = 0$ *e* $K = 0$*, as raízes do polinômio* P *são:*

$$x_1 = \sqrt{\frac{-M + \sqrt{M^2 - 4L}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-M + \sqrt{M^2 - 4L}}{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-M - \sqrt{M^2 - 4L}}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-M - \sqrt{M^2 - 4L}}{2}}$$

c) Se $R \neq 0$*, as raízes do polinômio* P *são:*

$$x_1 = \frac{Kz_1 + \sqrt{(Kz_1)^2 - 4KR}}{2K}, \quad x_2 = \frac{Kz_1 - \sqrt{(Kz_1)^2 - 4KR}}{2K}$$

$$x_3 = \frac{Kz_2 + \sqrt{(Kz_2)^2 - 4KR}}{2K}, \quad x_4 = \frac{Kz_2 - \sqrt{(Kz_2)^2 - 4KR}}{2K}$$

onde

$$z_1 = \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4\left(M - 2\frac{R}{K}\right)}}{2} \quad e \quad z_2 = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4\left(M - 2\frac{R}{K}\right)}}{2}$$

Além disso, os autores também demonstram que é sempre possível converter um polinômio genérico em um polinômio especial. Isto é, seja $P(x) = x^4 + Kx^3 + Mx^2 + Rx + L$ um polinômio do quarto grau com os coeficientes complexos. Então, existe $t \in \mathbb{C}$, tal que $P_t(x) = (x+t)^4 + K(x+t)^3 + M(x+t)^2 + R(x+t) + L$ é um polinômio especial. A saber, a constante t é uma raíz da equação (2.2)

$$(8R + K^3 - 4KM)t^3 + (16L + 2KR + K^2M - 4M^2)t^2 + (K^2R + 8KL - 4MR)t + K^2L - R^2 = 0 \tag{2.2}$$

Exemplo 2.2. *Encontre as raízes do polinômio* $P(x) = x^4 - x^3 - 1$*.*

Solução. Note que, $K = -1, M = 0, R = 0, L = -1$. Perceba que o polinômio P não é especial, isto é, $LK^2 \neq R^2$. Portanto, pela equação (2.2), temos

$$t^3 + 16t^2 - 8t + 1 = 0 \tag{2.3}$$

As raízes da equação (2.3) podem ser obtidas utilizando o método apresentada por Silva Filho, Pereira e Castro [10]. Assim, chegamos em:

$$t_0 \;=\; \sqrt[3]{\frac{-9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - \sqrt[3]{\frac{9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - \frac{16}{3}$$

Dando continuidade no método apresentado por Sena Filho (2010), obtemos as raízes da equação polinomial $x^4 - x^3 - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{T + i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \qquad x_2 = \frac{T + i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T}$$

$$x_3 = \frac{T - i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \qquad x_4 = \frac{T - i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T}$$

onde,

$$T \;=\; 4t_0 - 1 \;=\; 4\sqrt[3]{\frac{-9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - 4\sqrt[3]{\frac{9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - \frac{67}{3}$$

□

Observação 2.3. *Podemos obter aproximações das raízes do polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 1$, através de cálculos numéricos. Por exemplo, sabemos que*

$$T \;=\; 4\sqrt[3]{\frac{-9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - 4\sqrt[3]{\frac{9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - \frac{67}{3}$$

Fazendo o truncamento após a sexta casa decimal (parte real e parte complexa), encontramos $T = -66,955416$. Assim, concluímos que

$$x_1 \;=\; \frac{T + i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \;=\; -0,819173$$

$$x_2 \;=\; \frac{T + i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \;=\; 1,380276$$

$$x_3 = \frac{T - i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} = 0,219445 + 0,914474i$$

$$x_4 = \frac{T - i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} = 0,219445 - 0,914474i$$

3 Recorrências

Uma sequência é chamada de recorrente quando, a partir de um determinado termo, os demais termos são definidos com base no(s) termo(s) anterior(es). Essa técnica é frequentemente usada em matemática discreta, teoria dos números, análise de algoritmos e em muitas outras áreas da matemática e da ciência da computação Castro [1].

A classificação dessas recorrências é uma abordagem essencial para compreender e resolver problemas específicos relacionados a diferentes tipos de equações. Por meio delas, é possível identificar características particulares das recorrências, facilitando a aplicação de métodos adequados para cada caso. Além disso, oferece uma base sólida para o desenvolvimento de soluções analíticas ou numéricas. Para aqueles que buscam um entendimento mais aprofundado sobre essas definições e os conceitos subjacentes, recomenda-se a leitura de Pereira [7], Nogueira [6] e Weber [11].

Definição 3.1. *Uma recorrência linear de ordem k é uma recorrência do tipo*

$$x_{n+k} = f_{k-1}(n)x_{n+(k-1)} + \cdots + f_1(n)x_{n+1} + f_0(n)x_n + g(n) \tag{3.1}$$

onde $f_{k-1}, \ldots, f_1, f_0, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são funções e f_0 é diferente de 0 para uma quantidade infinita de termos. Quando a função g for identicamente nula, a recorrência é dita homogênea.

Definição 3.2. *A solução de uma recorrência é uma fórmula explícita para a mesma. Isto é, uma expressão que forneça cada termo x_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores.*

Exemplo 3.3. *A sequência de Fibonacci é definida através de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem*

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad com \quad F_0 = F_1 = 1,$$

onde sua solução é fornecida por $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$

Exemplo 3.4. *A recorrência linear homogênea de quarta ordem* $x_{n+4} - x_n = 0$, *com* $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$ *admite a seguinte solução*

$$x_n = \begin{cases} a, & se \;\; n = 4k-3 \;\; para\ algum\ k \in \mathbb{N} \\ b, & se \;\; n = 4k-2 \;\; para\ algum\ k \in \mathbb{N} \\ c, & se \;\; n = 4k-1 \;\; para\ algum\ k \in \mathbb{N} \\ d, & se \;\; n = 4k \;\; para\ algum\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observe que, o valor de x_n *depende apenas do número* n. *Por exemplo, considere* $n = 2.025$. *Como* $2.025 = 4 \times 507 - 3$, *temos que* $x_{2.025} = a$.

No trabalho de Castro [1], foi apresentado o procedimento para obter uma fórmula posicional para recorrências lineares, homogêneas, de terceira ordem com coeficientes constantes, a partir das raízes do seu polinômio característico. Melo et al. [3] estabelece uma fórmula para recorrências lineares, homogêneas, de quarta ordem com coeficientes constantes, mas sem a pretensão de fornecer os detalhes da prova para este teorema.

O Teorema 3.5 foi enunciado no trabalho de Melo et al. [3]. No entanto, a demonstração apresentada neste artigo é original. Essa contribuição confere um elemento de originalidade à presente investigação, ao oferecer uma abordagem formal e detalhada do referido resultado.

Teorema 3.5 (Melo et al. [3])**.** *Considere a recorrência linear homogênea de quarta ordem abaixo*

$$x_{k+4} + p \cdot x_{k+3} + q \cdot x_{k+2} + r \cdot x_{k+1} + s \cdot x_k = 0, \tag{3.2}$$

onde x_1, x_2, x_3, x_4 *são valores fornecidos inicialmente e* p, q, r *e* s *são constantes reais dadas, com* $s \neq 0$. *Considere* $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ *o seu polinômio característico e* α, β, γ *e* θ *suas raízes. Então, existem constantes* A, B, C *e* D *tais que:*

a) Se $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ *forem distintas duas a duas, temos que* $u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\theta^{n-1}$ *será solução da recorrência.*

b) Se $\alpha = \beta \neq \gamma \neq \theta \neq \alpha$, *temos que* $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\theta^{n-1}$ *será solução da recorrência.*

c) Se $\alpha = \beta \neq \gamma = \theta$, *temos que* $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D(n-1)\gamma^{n-1}$ *será solução da recorrência.*

d) Se $\alpha = \beta = \gamma \neq \theta$, *temos que* $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C(n-1)^2\alpha^{n-1} + D\theta^{n-1}$ *será solução da recorrência.*

e) Se $\alpha = \beta = \gamma = \theta$*, temos que* $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C(n-1)^2\alpha^{n-1} + D(n-1)^3\alpha^{n-1}$ *será solução da recorrência.*

Demonstração. Seja α uma raiz do polinômio característico $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$. Defina a sequência $y_n = \alpha^{n-1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Note que, como $s \neq 0$, temos que a raiz $\alpha \neq 0$, assim a sequência y_n está bem definida. Como $P(\alpha) = \alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$, temos que

$$\begin{aligned} y_{k+4} + p \cdot y_{k+3} + q \cdot y_{k+2} + r \cdot y_{k+1} + s \cdot y_k &= \alpha^{k+3} + p \cdot \alpha^{k+2} + q \cdot \alpha^{k+1} + r \cdot \alpha^k + s \cdot \alpha^{k-1} \\ &= \alpha^{k-1}(\alpha^4 + p \cdot \alpha^3 + q \cdot \alpha^2 + r \cdot \alpha + s) \\ &= \alpha^{k-1} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a sequência y_n será solução da recorrência (4.1). De modo análogo, as sequências $z_n = \beta^{n-1}, w_n = \gamma^{n-1}$ e $t_n = \theta^{n-1}$ serão soluções da recorrência (4.1). Considere A, B, C, D constantes.

Item a) A sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\theta^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1). Logo, teremos que

$$(I) \quad \begin{cases} A + B + C + D = x_1 \\ \alpha A + \beta B + \gamma C + \theta D = x_2 \\ \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C + \theta^2 D = x_3 \\ \alpha^3 A + \beta^3 B + \gamma^3 C + \theta^3 D = x_4 \end{cases}$$

Assim, o sistema linear (I) terá uma única solução caso o determinante da matriz T seja não nulo.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \theta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \theta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \theta^3 \end{bmatrix}$$

A matriz T, conhecida como matriz de Vandermonde, é invertível Castro (2016). Assim, possui determinante não nulo. Portanto, o sistema linear (I) admite uma única solução.

Item b) A sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\theta^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1). Logo, teremos que

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} A & + & 0 & + & C & + & D & = & x_1 \\ A\alpha & + & B\alpha & + & C\gamma & + & D\theta & = & x_2 \\ A\alpha^2 & + & 2B\alpha^2 & + & C\gamma^2 & + & D\theta^2 & = & x_3 \\ A\alpha^3 & + & 3B\alpha^3 & + & C\gamma^3 & + & D\theta^3 & = & x_4 \end{array} \right.$$

O sistema linear (II) terá uma única solução caso o determinante da matriz M seja não nulo.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \gamma & \theta \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & \gamma^2 & \theta^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & \gamma^3 & \theta^3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Laplace, na segunda coluna da matriz M, temos

$$det(M) = \alpha \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \gamma^2 & \theta^2 \\ \alpha^3 & \gamma^3 & \theta^3 \end{bmatrix} - 2\alpha^2 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \gamma & \theta \\ \alpha^3 & \gamma^3 & \theta^3 \end{bmatrix}$$

$$+ 3\alpha^3 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \gamma & \theta \\ \alpha^2 & \gamma^2 & \theta^2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(\alpha^3\theta^2 + \gamma^2\theta^3 + \alpha^2\gamma^3 - \alpha^2\theta^3 - \alpha^3\gamma^2 - \gamma^3\theta^2) - 2\alpha^2(\alpha^3\theta + \gamma\theta^3 + \alpha\gamma^3 - \alpha\theta^3 - \alpha^3\gamma - \gamma^3\theta)$$
$$+3\alpha^3(\alpha^2\theta + \gamma\theta^2 + \alpha\gamma^2 - \alpha\theta^2 - \alpha^2\gamma - \gamma^2\theta)$$

$$= \alpha[-\alpha^3(\gamma^2 - \theta^2) + \alpha^2(\gamma^3 - \theta^3) - \gamma^2\theta^2(\gamma - \theta)] - 2\alpha^2[-\alpha^3(\gamma - \theta) + \alpha(\gamma^3 - \theta^3) - \gamma\theta(\gamma^2 - \theta^2)]$$
$$+3\alpha^3[-\alpha^2(\gamma - \theta) + \alpha(\gamma^2 - \theta^2) - \gamma\theta(\gamma - \theta)]$$

$$= \alpha(\gamma - \theta)[-\alpha^3(\gamma + \theta) + \alpha^2(\gamma^2 + \gamma\theta + \theta^2) - \gamma^2\theta^2] - 2\alpha^2(\gamma - \theta)[-\alpha^3 + \alpha(\gamma^2 + \gamma\theta$$
$$+\theta^2) - \gamma\theta(\gamma + \theta)] + 3\alpha^3(\gamma - \theta)[-\alpha^2 + \alpha(\gamma + \theta) - \gamma\theta]$$

$$= \alpha(\gamma - \theta)[-\alpha^3(\gamma + \theta) + \alpha^2(\gamma^2 + \gamma\theta + \theta^2) - \gamma^2\theta^2 + 2\alpha^4 - 2\alpha^2(\gamma^2 + \gamma\theta + \theta^2) + 2\alpha\gamma\theta(\gamma + \theta)$$
$$-3\alpha^4 + 3\alpha^3(\gamma + \theta) - 3\alpha^2\gamma\theta]$$

$$= \alpha(\gamma - \theta)[2\alpha^3(\gamma + \theta) - \alpha^2(\gamma^2 + \gamma\theta + \theta^2) - \gamma^2\theta^2 - \alpha^4 + 2\alpha\gamma\theta(\gamma + \theta) - 3\alpha^2\gamma\theta]$$

$$= \alpha(\gamma - \theta)[2\alpha^3(\gamma + \theta) + 2\alpha\gamma\theta(\gamma + \theta) - \alpha^2(\gamma + \theta)^2 - \gamma^2\theta^2 - \alpha^4 - 2\alpha^2\gamma\theta]$$

$$= \alpha(\gamma - \theta)[2\alpha(\gamma + \theta)(\alpha^2 + \gamma\theta) - \alpha^2(\gamma + \theta)^2 - (\alpha^2 + \gamma\theta)^2]$$

$$= -\alpha(\gamma-\theta)[\alpha(\gamma+\theta)-(\alpha^2+\gamma\theta)]^2$$
$$= -\alpha(\gamma-\theta)(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\theta)^2$$

Como α, γ, θ são não nulos e distintos dois a dois, o sistema linear (II) admite uma única solução.

Item c) A sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D(n-1)\gamma^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1). Logo, teremos que

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} A & + & 0 & + & C & + & 0 & = & x_1 \\ A\alpha & + & B\alpha & + & C\gamma & + & D\gamma & = & x_2 \\ A\alpha^2 & + & 2B\alpha^2 & + & C\gamma^2 & + & 2D\gamma^2 & = & x_3 \\ A\alpha^3 & + & 3B\alpha^3 & + & C\gamma^3 & + & 3D\gamma^3 & = & x_4 \end{array} \right.$$

O sistema linear (III) terá uma única solução caso o determinante da matriz G seja não nulo.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & \gamma & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & \gamma^2 & 2\gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & \gamma^3 & 3\gamma^3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Laplace, na primeira linha da matriz G, temos

$$det(G) = 1 \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \gamma \\ 2\alpha^2 & \gamma^2 & 2\gamma^2 \\ 3\alpha^3 & \gamma^3 & 3\gamma^3 \end{bmatrix} + 1 \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 2\gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 3\gamma^3 \end{bmatrix}$$

$$det(G) = 3\alpha^3\gamma^3 - 4\alpha^2\gamma^4 + \alpha\gamma^5 + \alpha^5\gamma - 4\alpha^4\gamma^2 + 3\alpha^3\gamma^3$$
$$= \alpha\gamma(-4\alpha\gamma^3 + \gamma^4 + \alpha^4 - 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma^2)$$
$$= \alpha\gamma(\alpha-\gamma)^4$$

Como α e γ são não nulos e distintos, o sistema linear (III) admite uma única solução.

Item d) A sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C(n-1)^2\alpha^{n-1} + D\theta^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1). Logo, teremos que

$$(IV) \quad \begin{cases} A & + & 0 & + & 0 & + & D & = & x_1 \\ A\alpha & + & B\alpha & + & C\alpha & + & D\gamma & = & x_2 \\ A\alpha^2 & + & 2B\alpha^2 & + & 4C\alpha^2 & + & D\gamma^2 & = & x_3 \\ A\alpha^3 & + & 3B\alpha^3 & + & 9C\alpha^3 & + & D\gamma^3 & = & x_4 \end{cases}$$

O sistema linear (IV) terá uma única solução caso o determinante da matriz S seja não nulo.

$$S \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 4\alpha^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 9\alpha^3 & \gamma^3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Laplace, na primeira linha da matriz S, temos

$$det(S) \ = \ 1 \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ 2\alpha^2 & 4\alpha^2 & \gamma^2 \\ 3\alpha^3 & 9\alpha^3 & \gamma^3 \end{bmatrix} \ - \ 1 \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 4\alpha^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 9\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$det(S) = 6\alpha^5\gamma - 6\alpha^4\gamma^2 + 2\alpha^3\gamma^3 - 2\alpha^6 = 2\alpha^3(3\alpha^2\gamma - 3\alpha\gamma^2 + \gamma^3 - \alpha^3) = 2\alpha^3(\gamma - \alpha)^3$$

Como α e γ são não nulos e distintos, o sistema linear (IV) admite uma única solução.

Item e) A sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1} + C(n-1)^2\alpha^{n-1} + D(n-1)^3\alpha^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1). Logo, teremos que

$$(V) \quad \begin{cases} A & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & x_1 \\ A\alpha & + & B\alpha & + & C\alpha & + & D\alpha & = & x_2 \\ A\alpha^2 & + & 2B\alpha^2 & + & 4C\alpha^2 & + & 8D\alpha^2 & = & x_3 \\ A\alpha^3 & + & 3B\alpha^3 & + & 9C\alpha^3 & + & 27D\alpha^3 & = & x_4 \end{cases}$$

O sistema linear (V) terá uma única solução caso o determinante da matriz R seja não nulo.

$$R \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 4\alpha^2 & 8\alpha^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 9\alpha^3 & 27\alpha^3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Laplace, na primeira linha da matriz R, temos

$$det(R) \;=\; 1 \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 2\alpha^2 & 4\alpha^2 & 8\alpha^2 \\ 3\alpha^3 & 9\alpha^3 & 27\alpha^3 \end{bmatrix} \;=\; 16\alpha^6$$

Como α é não nulo, temos que o sistema linear (V) admite uma única solução. Com essa prova, finalizamos a demonstração do Teorema 3.5.

□

Exemplo 3.6. *Encontre a solução explícita da recorrência linear homogênea de quarta ordem* $x_{n+4} - x_n = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},$ *com* $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d.$

Solução: O polinômio característio dessa recorrência é $P(x) = x^4 - 1$. Assim, suas raízes são

$$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = i,\ \theta = -i$$

Como as soluções são distintas, duas a duas, pelo Teorema 3.5, temos que

$$u_n \;=\; A\alpha^{n-1} \;+\; B\beta^{n-1} \;+\; C\gamma^{n-1} \;+\; D\theta^{n-1}$$

onde A, B, C e D é a solução do sistema (VI)

$$(VI) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} A & + & B & + & C & + & D & = & a \\ A & - & B & + & iC & - & iD & = & b \\ A & + & B & - & C & - & D & = & c \\ A & - & B & - & iC & + & iD & = & d \end{array} \right.$$

Portanto,

$$u_n = \frac{a+b+c+d}{4} + \frac{a-b+c-d}{4}(-1)^{n-1} + \frac{a+b-c-d}{4}i^{n-1} + \frac{a-b-c+d}{4}(-i)^{n-1}$$

□

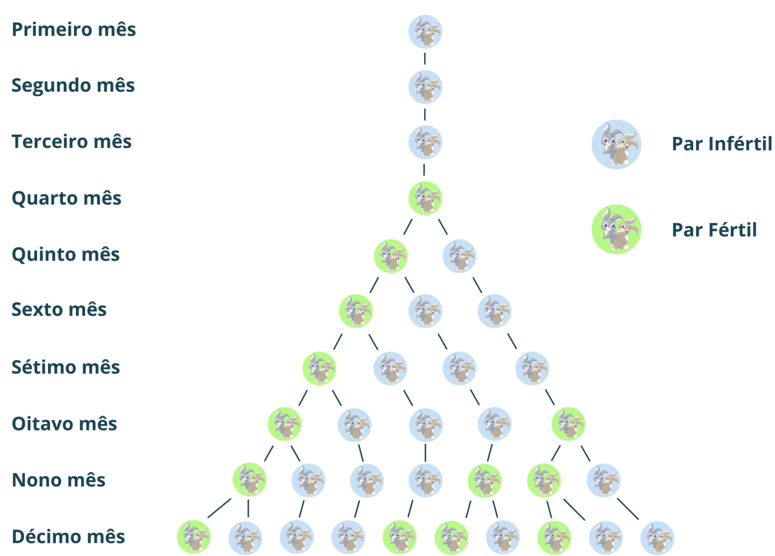
4 Uma Generalização da Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, exímio matemático italiano, escreveu vários livros que influenciaram profundamente a matemática europeia desenvolvida no Século XIII. Dentre os diversos temas e problemas abordados em seus escritos, o que mais se destacou é o famoso problema dos coelhos, que versa sobre a reprodução de uma população de coelhos sob certas condições ideais. Tal problema permanece uma fonte de inspiração, como se observa no trabalho de Melo et al. [4].

A proposta de extensão da sequência original foi orientada por dois parâmetros principais. O primeiro estabelece que as alterações introduzidas devem ser mínimas, de modo a preservar as características essenciais da sequência de Fibonacci, como o crescimento progressivo da população. O segundo, por sua vez, impõe que a solução da nova sequência seja obtida a partir de uma relação de recorrência de quarta ordem, o que acarreta modificações mais significativas no comportamento da sequência gerada.

Considere o seguinte problema: você adquire um par de coelhos recém-nascidos (um macho e uma fêmea) no mês zero. Esses coelhos atingem a idade adulta aos quatro meses de vida, momento em que começam a se reproduzir, gerando um novo par de coelhos a cada mês. Os coelhos recém-nascidos também crescem e começam a se reproduzir após atingirem os quatro meses. A questão então é: quantos pares de coelhos existirão no n-ésimo mês, levando em conta essa nova regra de reprodução?

Figura 1: Distribuição dos pares de coelhos de acordo com os meses



Fonte: Elaborada pelos autores

Essa generalização se distingue da sequência de Fibonacci por introduzir um fator adicional, que consiste na idade mínima para reprodução dos coelhos, que no caso é de quatro meses. Esse aspecto altera a dinâmica de crescimento populacional, uma vez que a reprodução não ocorre imediatamente após o nascimento, mas apenas após esse tempo de desenvolvimento. A solução proposta, portanto, não segue o modelo tradicional.

Observe que, nos primeiros quatro meses, temos apenas um par de coelhos, no quinto mês temos dois pares, no sexto mês temos três pares, no sétimo mês temos quatro pares, no oitavo mês temos cinco pares, no nono mês temos sete pares e assim por diante. A partir desse entendimento, monta-se a Tabela 1, onde é possível ver o comportamento desta reprodução.

Tabela 1: Modelagem da distribuição dos pares de coelhoes

Mês	Pares de coelhos	Relação de recorrência
1	1	x_1
2	1	x_2
3	1	x_3
4	1	x_4
5	2	$x_5 = x_4 + x_1$
6	3	$x_6 = x_5 + x_2$
7	4	$x_7 = x_6 + x_3$
8	5	$x_8 = x_7 + x_4$
9	7	$x_9 = x_8 + x_5$
10	10	$x_{10} = x_9 + x_6$
11	14	$x_{11} = x_{10} + x_7$
12	19	$x_{12} = x_{11} + x_8$

Fonte: Elaborada pelos autores

Como podemos observar na Tabela 1, o problema descrito na extensão da sequência de Fibonacci gera uma recorrência linear, homogênea, de quarta ordem, com seus coeficientes constantes, onde:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \quad e \quad x_{n+4} = x_{n+3} + x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

Seu polinômio característico é dado por $P(x) = x^4 - x^3 - 1$. Assim, pelo Exemplo 2.2, temos que suas raízes serão

$$\alpha = \frac{T + i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \qquad \beta = \frac{T + i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T - 2iT^2\sqrt{T}}}{4T}$$

$$\gamma = \frac{T - i\sqrt{T} + \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T} \qquad \theta = \frac{T - i\sqrt{T} - \sqrt{3T^2 + T + 2iT^2\sqrt{T}}}{4T}$$

onde,

$$T \;=\; 4\sqrt[3]{\frac{-9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - 4\sqrt[3]{\frac{9.371 + \sqrt{7.641}}{54}} - \frac{67}{3}$$

Como as raízes do polinômio característico são distintas, duas a duas, temos pelo Teorema 3.5 que a sequência $u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\theta^{n-1}$ será solução da recorrência (4.1), onde as constantes A, B, C e D são obtidas através do sistema linear abaixo.

$$(VII) \quad \begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ \alpha A + \beta B + \gamma C + \theta D = 1 \\ \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C + \theta^2 D = 1 \\ \alpha^3 A + \beta^3 B + \gamma^3 C + \theta^3 D = 1 \end{cases}$$

□

Conforme foi visto na observação 2.3, podemos obter aproximações das raízes do polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 1$, por meio do truncamento de suas expansões numéricas após a sexta casa decimal.

$\alpha = -0,819173,\ \beta = 1,380276,\ \gamma = 0,219445 + 0,914474i,\ \theta = 0,219445 - 0,914474i$

Assim, resolvendo o sistema linear (VII), temos

$A = 0,130525,\ B = 0,547527,\ C = 0,160973 - 0,153423i,\ D = 0,160973 + 0,153423i$

Portanto,

$$u_n = (0,130525).(-0,819173)^{n-1} + (0,547527).(1,380276)^{n-1} + (0,160973 - 0,153423i) .(0,219445 + 0,914474i)^{n-1} + (0,160973 + 0,153423i).(0,219445 - 0,914474i)^{n-1}$$

Na Tabela 2, será realizada uma comparação entre os valores obtidos por meio do truncamento e os valores reais da recorrência. A discrepância será o módulo da diferença obtida entre os resultados. Essa análise tem como objetivo destacar as diferenças entre a solução aproximada e a solução analítica.

Tabela 2: Comparação entre os valores reais da recorrência e os obtidos pelo truncamento

Mês	Valor exato da recorrência	Valor aproximado da recorrência	Discrepância
1	$x_1 = 1$	$u_1 = 0,999998$	$0,000002$
3	$x_3 = 1$	$u_3 = 1,000142$	$0,000142$
5	$x_5 = 2$	$u_5 = 2,000090$	$0,000090$
9	$x_9 = 7$	$u_9 = 7,000483$	$0,000483$
17	$x_{17} = 95$	$u_{17} = 95,006551$	$0,006551$
33	$x_{33} = 16.493$	$u_{33} = 16.494,132396$	$1,132396$
65	$x_{65} = 496.850.954$	$u_{65} = 496.885.067,586282$	$34.113,586282$

Fonte: Elaborada pelos autores

A comparação entre os valores exatos da recorrência e aqueles obtidos por truncamento mostra que, com o aumento do índice, as discrepâncias se tornam mais evidentes. Nesse cenário, destaca-se a importância de uma fórmula fechada, que permite obter resultados analíticos precisos, superando as limitações dos métodos numéricos.

5 Considerações Finais

Este estudo dedicou-se à investigação de sequências numéricas, destacando sua importância fundamental no desenvolvimento da matemática e em suas múltiplas aplicações. As sequências constituem elementos centrais em diversos ramos da matemática, como a análise, a teoria dos números, a probabilidade e a estatística, entre outros. A sequência de Fibonacci constitui um exemplo clássico que, embora originada de uma relação recursiva simples, evidencia como conceitos aparentemente elementares podem resultar em aplicações de amplo alcance, tanto teórico quanto prático.

Ao longo deste estudo, foi apresentado um método alternativo para resolver recorrências lineares homogêneas de quarta ordem com coeficientes constantes. Como aplicação, propôs-se uma generalização da sequência de Fibonacci, a partir da qual foi possível derivar sua lei de formação e, consequentemente, determinar sua solução. Este trabalho contribui para reforçar a importância e a profundidade do estudo das sequências numéricas. Espera-se que os resultados obtidos neste trabalho possam estimular o interesse por investigações futuras nessa área, contribuindo para o aprofundamento teórico e a exploração de novas aplicações relacionadas às sequências numéricas.

Referências

[1] Castro, F. J. *Matemática discreta: Tópicos de recorrências lineares e suas aplicações*. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. PROFMAT, pp. 1-77, 2016.

[2] Hobold, C. H.; Santos, P. J. S. dos. *Sequências Numéricas e Séries*. 1 ed. rev., Palhoça: UnisulVirtual, 2011.

[3] Melo, R. B.; Santos, D. R.; Sena Filho, E. S. *Generalizando a Sequência de Fibonacci*. In: XXI Semana da Matemática e XI Semana da Estatística, 2021, Uberlândia. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2021. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1iXgtPtz_GmezMBgo-bHIbB3TfjKfm2s7/view?pli=1. Acesso em: 25 fev. 2025.

[4] Melo, R. B.; Santos, D. R.; Silva, J. P.; Sena Filho, E. S. *Generalizando a Sequência de Fibonacci*. XXV Encontro de Iniciação Científica: Desafios, interfaces e contribuições da Ciência para o desenvolvimento sustentável no semiárido cearense, Sobral-CE, 2024. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1mXLZvpKkaFRv2pagrDHCrnmvYdy5_1FR/view. Acesso em: 21 fev. 2025.

[5] Muniz Neto, A. C. Resolvendo Recorrências. Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2019.

[6] Nogueira, G. T. *As recorrências lineares de* 1^o *e* 2^o *ordem: um olhar para as soluções particulares das equações não homogêneas de* 2^o *ordem e aplicações.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, 2024.

[7] Pereira, M. V. *Recorrências: Problemas e aplicações.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade de Brasília, pp. 1-61, 2014.

[8] Sena Filho, E. da S.; Um método de resolução de equações polinomiais de grau. Revista Matemática Universitária, n. 46, 2010.

[9] Sena Filho, E. da S.; Nascimento, A. C. do. *An alternative method for solving fourth degreepolynomial equations.* Brazilian Electronic Journal of Mathematics, Uberlândia, v. 5, p. 1-13, 2024.

[10] Silva Filho, J. F. da; Pereira, O. E. S.; Castro, F. C. S. de.; Simplificando a resolução da equação do terceiro grau. Professor de Matemática Online, v. 10, n. 4, 2022.

[11] Weber, J. E. *Recorrências:Teoria e aplicações no processo de ensino-aprendizagem.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2024.

Received 16 June 2025
Accept 25 September 2025