

ANÁLISE DE UM TEOREMA DO TIPO FAVARD NO CÍRCULO UNITÁRIO: POLINÔMIOS ORTOGONAIS E RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA**ANALYSIS OF A FAVARD TYPE THEOREM ON THE UNIT CIRCLE: ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND RECURRENCE RELATIONS**

Filipe Bastos Ribeiro

Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Maranhão - UFMA

fb.ribeiro@alumni.ufma.br

Jairo Santos da Silva

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Maranhão - UFMA

jairo.santos@ufma.brComunicado por A. Viana**Resumo**

O Teorema de Favard, amplamente conhecido no contexto da reta real, assegura a existência de uma única medida de probabilidade para a qual certos polinômios, que satisfazem uma relação de recorrência de três termos, são ortogonais. No círculo unitário, existe uma versão bem estabelecida deste resultado. Entretanto, diferentemente do caso real, a medida obtida nessa configuração não gera polinômios ortogonais que obedeçam a uma relação de recorrência de três termos. Este artigo, baseado em uma pesquisa de Mestrado em Matemática realizada na Universidade Federal do Maranhão, investiga um Teorema do tipo Favard no círculo unitário, conforme apresentado por [6]. O estudo foca em polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos, onde os coeficientes que aparecem nessa relação são sequências reais, incluindo uma sequência encadeada positiva. O principal objetivo é explorar e detalhar os aspectos técnicos que sustentam esse teorema, preenchendo lacunas e complementando resultados não explicitados no trabalho original.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais no círculo unitário. Relação de recorrência de três termos. Sequências encadeadas positivas. Frações contínuas.

Abstract

Favard's Theorem, widely known in the context of the real line, ensures the existence of a unique probability measure for which certain polynomials, satisfying a three term

recurrence relation, are orthogonal. On the unit circle, there is a well established version of this result. However, unlike the real line case, the measure obtained in this configuration does not generate orthogonal polynomials that satisfy a three term recurrence relation. This article, based on a Master's research in Mathematics conducted at the Federal University of Maranhão, investigates a Favard type Theorem on the unit circle, as presented by [6]. The study focuses on polynomials that satisfy a three term recurrence relation, where the coefficients appearing in this relation are real sequences, including a positive chain sequence. The main objective is to explore and detail the technical aspects that support this theorem, filling gaps and complementing results not explained in the original work.

Keywords: Orthogonal polynomials on the unit circle. Three term recurrence formula. Positive chain sequences. Continued fractions.

1 Introdução

Os polinômios ortogonais têm suas raízes nas áreas de Análise e Trigonometria, estando intimamente ligados às Frações Contínuas, uma vez que sua origem remonta ao estudo de casos especiais dessas frações por matemáticos como Stieltjes, Gauss e Jacobi (veja Szegő [24]). Além de sua relevância teórica, a teoria dos polinômios ortogonais desempenha um papel fundamental na resolução de problemas em diversas áreas da Matemática Pura e Aplicada, contribuindo para estudos em equações diferenciais, interpolação, aproximação numérica, estabilidade numérica e frações contínuas, além de ter aplicações em campos como Mecânica Quântica e Física Estatística (para mais detalhes, consulte, por exemplo, [1], [2], [3] e [12]).

Formalmente, os polinômios ortogonais são definidos por meio de uma relação de ortogonalidade em um espaço de funções ponderado por uma medida. Especificamente, uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida γ no intervalo (a, b) , se P_n é de grau exatamente n e

$$\langle P_m, P_n \rangle_{\gamma} = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}.$$

Neste caso, a medida (positiva) γ é uma função real, definida no intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento e tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\gamma(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

existam.

Uma propriedade extremamente útil, e que merece destaque, relativa aos polinômios ortogonais na reta real, é o fato desses polinômios satisfazerem uma relação de recorrência de três termos. Essa relação para polinômios mônicos (ou seja, polinômios cujo coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n}$, é igual a 1, sendo $a_{n,n}$ o coeficiente de grau n de um polinômio de mesmo grau) é dada por:

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})P_n(x) - \beta_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.1)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\beta_{j+1}, \alpha_j \in \mathbb{R}$ para $j \geq 1$.

Um conhecido resultado da literatura, chamado Teorema de Favard, garante que se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos (1.1), então, sob certas condições na sequência real $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$, é possível obter-se uma única medida de probabilidade em relação à qual a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal (veja, por exemplo, Chihara [7]).

Os polinômios ortogonais também podem ser analisados no contexto do círculo unitário, que é o foco deste trabalho, de caráter essencialmente expositivo e integrador, reunindo resultados consolidados sobre polinômios ortogonais no círculo unitário e formulações do tipo Favard.

Mais do que apresentar novos resultados, busca-se oferecer uma leitura didática e coerente de demonstrações, relações de recorrência e propriedades fundamentais que estruturam essa teoria. A intenção é favorecer a compreensão dos aspectos técnicos e conceituais que, por vezes, são tratados de forma muito sintética na literatura especializada.

Neste sentido, o trabalho se apoia em formulações clássicas, como as discutidas por Castillo *et al.* [6], e dialoga com abordagens contemporâneas sobre polinômios ortogonais no círculo unitário e sequências encadeadas positivas, presentes em estudos de Simon [23], Bracciali *et al.* [4], Ismail e Sri Ranga [14], e Marcató *et al.* [19].

Vale ressaltar que o estudo dos polinômios ortogonais no círculo unitário, também conhecidos como polinômios de Szegő, teve início na primeira metade do século XX com Gabor Szegő. Atualmente, estes polinômios, vêm chamando a atenção de muitos pesquisadores, sobretudo devido a suas aplicações em diversas áreas e temas da Matemática, tais como, regras de quadratura, processamento de sinais e teoria espectral (para outras aplicações veja, por exemplo, [5, 17, 20, 21, 22, 25]).

Salienta-se que, sendo $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$ uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, uma sequência de polinômios ortogonais, no círculo unitário, $\{S_n\}_{n=0}^\infty$, com relação à medida μ , pode ser definida por

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\mu(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \kappa_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde S_n é um polinômio de grau exatamente n . Aqui, conforme a terminologia adotada por Simon [21], a medida μ é não trivial se o seu suporte é um conjunto infinito, e μ é uma medida de probabilidade se $\mu(\mathcal{C}) = 1$. Além disso, diz-se que $z_0 \in \mathcal{C}$ é um ponto puro (ou ponto de massa) de μ , se a medida desse ponto é positiva, ou seja, $\mu(\{z_0\}) > 0$.

Diferentemente dos polinômios ortogonais na reta real, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Todavia, quando mônicos, esses polinômios satisfazem as relações

$$\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

onde $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$, $\alpha_{n-1} := -\overline{S_n(0)}$ e $S_n^*(z) := z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $S_n(z)$.

Os números complexos α_n são usualmente conhecidos na literatura como coeficientes de Verblunsky, e por serem oriundos da sequência de polinômios ortogonais $\{S_n\}_{n=0}^\infty$, satisfazem a condição: $|\alpha_n| < 1$ para todo $n \geq 0$ (confira, por exemplo, Simon [21]).

Uma conhecida versão do Teorema de Favard para o círculo unitário (denominada Teorema de Verblunsky) assegura que se $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência arbitrária de números complexos tais que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, então, associada a esta sequência, é possível obter-se uma única medida de probabilidade não trivial μ , suportada no círculo unitário, tal que os polinômios $S_n(z)$, $n \geq 0$, gerados pelas relações (1.3), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos (veja, por exemplo, [11] ou [21, Teorema 1.7.11]).

Vale frisar que na versão do Teorema de Favard para o círculo unitário mencionada acima, as relações de recorrências para os polinômios de Szegő não são relações de recorrência de três termos (como no caso real). Além disso, os coeficientes envolvidos não são compostos apenas de sequências reais, já que no caso envolvem a sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$.

Diante do exposto, o presente artigo tem como principal objetivo apresentar um teorema do tipo Favard para o círculo unitário associado a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Neste caso, os coeficientes que aparecem na relação de recorrência são sequências reais, sendo uma delas uma sequência encadeada positiva.

É importante mencionar que, segundo Chihara [7], uma sequência $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é denominada sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1, \quad \text{e } d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Neste caso, a sequência $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ (que pode não ser necessariamente única) é denominada sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$. Ademais, pode-se mostrar que toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de

parâmetros minimal e uma sequência de parâmetros maximal, denotadas, respectivamente, por $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{M_n\}_{n=0}^\infty$. Além disso, se $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^\infty$, então $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty := \{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ é, também, uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_{1,n}\}_{n=0}^\infty := \{g_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ (para outros resultados envolvendo a teoria de sequências encadeadas positivas e suas conexões com polinômios ortogonais veja, por exemplo, [7, 19]).

De forma mais precisa, este artigo – que representa um recorte da dissertação de Mestrado em Matemática desenvolvida na Universidade Federal do Maranhão ([16]) – tem como propósito discutir com maior detalhamento os resultados apresentados por Castillo *et al.* [6]. Naquele trabalho, os autores demonstraram que, a partir de um par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, onde $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência encadeada positiva, é possível obter-se uma única medida de probabilidade μ no círculo unitário tal que a sequência de polinômios

$$\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}_{n=0}^\infty \quad (1.4)$$

é a sequência de polinômios de Szegő com relação a esta medida μ . Aqui, os polinômios $R_n(z)$, $n \geq 0$, utilizados para gerar a sequência de polinômios ortogonais com respeito a μ , dada em (1.4), satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$. Além disso, a sequência $\{m_n\}_{n=0}^\infty$, também utilizada para gerar a sequência de polinômios ortogonais (1.4), é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ (ou seja, aquela em que $m_0 = 0$).

Dessa forma, a análise dessa abordagem não apenas aprofunda a compreensão da teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário, mas também possibilita avanços significativos no estudo de medidas de probabilidade não triviais nesse contexto, por meio da teoria de sequências encadeadas positivas. Esse vínculo, embora ainda pouco explorado na literatura, tem sido objeto de destaque em trabalhos como os de Castillo *et al.* [6] e de Costa, Felix e Sri Ranga [8]. No último, a medida de probabilidade associada ao par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ também foi recuperada, mas por um método distinto daquele empregado em [6].

O presente artigo está organizado em seções, cuja estrutura é descrita resumidamente a seguir. A Seção 2 apresenta resultados sobre os zeros dos polinômios $R_n(z)$, fundamentais para determinar a medida de probabilidade μ associada ao par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, por meio da relação de recorrência de três termos (1.5). Na Seção 3, com o uso da teoria de frações contínuas, obtêm-se propriedades assintóticas

das funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$, cujos polinômios $Q_n(z)$, $n \geq 0$, obedecem à mesma relação de recorrência que $R_n(z)$, mas com condições iniciais distintas. Essas propriedades são utilizadas na construção de um funcional de momento auxiliar, \mathcal{N} , essencial para determinar μ . As Seções 4 e 5 reúnem os principais resultados deste estudo. Na primeira, obtém-se a medida μ e o funcional de momento \mathcal{M} associado; na segunda, demonstra-se que a sequência de polinômios dada em (1.4) corresponde aos polinômios de Szegő relativos à medida μ . Por fim, a Seção 5 apresenta as considerações finais e as observações conclusivas sobre o desenvolvimento do trabalho.

2 Alguns resultados preliminares

Os resultados apresentados nessa seção fornecem algumas informações importantes relacionadas aos zeros dos polinômios $R_n(z)$. Esses resultados serão de grande utilidade na obtenção da medida de probabilidade não trivial μ (no círculo unitário) que está associada ao par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ por meio da relação de recorrência de três termos (1.5).

Lema 2.1 *Todos os n zeros dos polinômios $R_n(z)$ são simples e estão no círculo unitário \mathcal{C} . Além disso, se denotarmos os zeros de R_n por $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, então*

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \dots < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1. \quad (2.1)$$

Demonstração: Este lema é parte de um resultado um pouco mais geral estabelecido no trabalho de Dimitrov e Sri Ranga [10] com o uso das funções $G_n(x)$, definidas no intervalo $[-1, 1]$, por

$$G_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z), \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

onde $2x = z^{1/2} + z^{-1/2}$ e $z = e^{i\theta}$. Em [10] os autores mostraram que, para todo $n \geq 1$, as funções $G_n(x)$ têm exatamente n zeros distintos em $[-1, 1]$. Precisamente, denotando esses zeros por $x_{n,j}$, mostrou-se que $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, onde esses zeros também satisfazem a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \dots < x_{n+1,2} < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1. \quad (2.3)$$

Dessa forma, usando a relação (2.2), que conecta os polinômios $R_n(z)$ com as funções $G_n(x)$, definidas em $[-1, 1]$, por meio da transformação

$$2x = z^{1/2} + z^{-1/2} \quad \text{com} \quad z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

e levando-se em consideração que os polinômios $R_n(z)$ (gerados pela relação de recorrência (1.5)) têm grau n ($n \geq 1$), e que cada um de seus zeros, denotados por $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, gera um zero da função $G_n(x)$ (e vice-versa), já que

$$(4z)^{-n/2} = \frac{1}{(4z)^{n/2}} = \frac{1}{(4e^{i\theta})^{n/2}} \neq 0,$$

pode-se concluir que todos os n zeros dos polinômios $R_n(z)$ são simples, estão no círculo unitário \mathcal{C} e são tais que

$$2x_{n,j} = z_{n,j}^{1/2} + z_{n,j}^{-1/2}, \quad \text{com } z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}, \quad 0 < \theta_{n,j} < 2\pi.$$

Além disso, a propriedade (2.1), satisfeita pelos argumentos $\theta_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, de $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, segue diretamente da propriedade de entrelaçamento (2.3), satisfeita pelos zeros, $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, das funções $G_n(x)$. ■

Observação 2.2 (i) *Uma vez que os zeros $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, dos polinômios $R_n(z)$, $n \geq 1$, são tais que $0 < \theta_{n,j} < 2\pi$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, tem-se que $z = 1$ não é um zero de $R_n(z)$, $n \geq 1$, isto é, $z_{n,j} \neq 1$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, ou ainda,*

$$R_n(1) \neq 0, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

(ii) *Em Dimitrov e Sri Ranga [10] também foi mostrado que as funções $G_n(x)$, dadas por (2.2), satisfazem a fórmula de recorrência de três termos*

$$G_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $G_0(x) = 1$ e $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$. Além disso, as funções de Christoffel-Darboux associadas (ou Wronskianos)

$$W_n(x) = G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x), \quad n \geq 1, \quad (2.4)$$

as quais não são necessariamente positivas ao longo de todo o intervalo $[-1, 1]$, satisfazem, nos zeros de $G_n(x)$, $n \geq 1$, em $[-1, 1]$,

$$W_n(x_{n,j}) > 0 \quad \text{e} \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = d_{n+1}W_n(x_{n,j}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Neste caso, sendo $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, um zero de $G_n(x)$, tem-se, por (2.4), que

$$W_n(x_{n,j}) = G'_n(x_{n,j})G_{n-1}(x_{n,j}) \quad \text{e} \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = -G'_n(x_{n,j})G_{n+1}(x_{n,j}).$$

Agora, considerando os Wronskianos

$$V_n(z) = R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

associados com os polinômios $R_n(z)$, vale o seguinte resultado:

Lema 2.3 *Sejam $V_n(z)$ e $W_n(x)$ os Wronskianos associados, respectivamente, aos polinômios $R_n(z)$ e às funções $G_n(x)$, $n \geq 1$, dados, respectivamente, por (2.4) e (2.6). Se $z_{n,j}$ e $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são, respectivamente, os zeros de $R_n(z)$ e $G_n(x)$, então, para $n \geq 1$, tem-se*

$$\frac{(z_{n,j})^{-(n-2)}}{z_{n,j} - 1} V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3} W_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Demonstração: Uma vez que a relação em (2.2) é tal que

$$2x = z^{1/2} + z^{-1/2}, \quad (2.8)$$

com $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, é possível considerar z como uma função de x , de modo que, por (2.2), tem-se

$$G'_n(x) = [(4z)^{-n/2} R_n(z)]' = -\frac{n}{2} (4z)^{-(n/2)-1} (4z') R_n(z) + (4z)^{-n/2} R'_n(z) z'. \quad (2.9)$$

Por outro lado, derivando-se, membro a membro, a igualdade (2.8) implicitamente em relação a x , obtém-se

$$2 = \frac{1}{2} z^{-1/2} z' - \frac{1}{2} z^{-3/2} z' = \left(\frac{1}{2z^{1/2}} - \frac{1}{2z^{3/2}} \right) z',$$

de onde segue que

$$z' = \frac{4z^{3/2}}{z - 1}. \quad (2.10)$$

Conseqüentemente, substituindo (2.10) na expressão de $G'_n(x)$, dada em (2.9), tem-se

$$\begin{aligned} G'_n(x) &= -\frac{n}{2} (4z)^{-(n/2)-1} \left[4 \left(\frac{4z^{3/2}}{z - 1} \right) \right] R_n(z) + (4z)^{-n/2} R'_n(z) \left(\frac{4z^{3/2}}{z - 1} \right) \\ &= \frac{(4z)^{-(n-1)/2}}{z - 1} \left[2z R'_n(z) - n R_n(z) \right]. \end{aligned}$$

Daí, considerando $G_n(x)$ definido como em (2.2), os Wronskianos $W_n(x)$, dados por (2.4), satisfazem

$$\begin{aligned} W_n(x) &= G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x) \\ &= \frac{(4z)^{-(n-1)/2}}{z-1} \left[2zR'_n(z) - nR_n(z) \right] (4z)^{-(n-1)/2} R_{n-1}(z) \\ &\quad - \frac{(4z)^{-(n-2)/2}}{z-1} \left[2zR'_{n-1}(z) - (n-1)R_{n-1}(z) \right] (4z)^{-n/2} R_n(z) \\ &= \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} \left\{ 2z \left[R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z) \right] - R_n(z)R_{n-1}(z) \right\}. \end{aligned}$$

Agora, levando-se em consideração os Wronskianos $V_n(z)$ (associados aos polinômios $R_n(z)$), dados por (2.6), a igualdade anterior pode ser reescrita como

$$W_n(x) = \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} [2zV_n(z) - R_n(z)R_{n-1}(z)], \quad n \geq 1.$$

Logo, se $z_{n,j}$ e $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são, respectivamente, os zeros de $R_n(z)$ e $G_n(x)$, $n \geq 1$, então, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, tem-se, por (2.2), que

$$R_n(z_{n,j}) = G_n(x_{n,j})(4z_{n,j})^{n/2} = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} W_n(x_{n,j}) &= \frac{(4z_{n,j})^{-(n-1)}}{z_{n,j}-1} [2z_{n,j}V_n(z_{n,j}) - R_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})] \\ &= \frac{(4z_{n,j})^{-(n-1)}}{z_{n,j}-1} [2z_{n,j}V_n(z_{n,j})] = 2^{-(2n-3)} \frac{(z_{n,j})^{-(n-2)}}{z_{n,j}-1} V_n(z_{n,j}), \end{aligned}$$

de onde segue o resultado desejado. ■

3 Propriedades assintóticas e um funcional de momento auxiliar \mathcal{N}

Seja $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a seqüência de polinômios dada pela expressão de fração contínua

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \cfrac{2d_1}{(1+ic_1)z + (1-ic_1)} \cfrac{4d_2z}{(1+ic_2)z + (1-ic_2)} \cfrac{4d_nz}{(1+ic_n)z + (1-ic_n)}. \quad (3.1)$$

Da teoria de frações contínuas (veja, por exemplo, [7, 9, 18]) pode-se afirmar que os polinômios Q_n são dados por

$$Q_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] Q_n(z) - 4d_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

com $Q_0(z) = 0$ e $Q_1(z) = 2d_1$.

O primeiro lema dessa seção fornece um resultado assintótico associado com a sequência $\{Q_n(1)/R_n(1)\}_{n=0}^\infty$ obtida a partir de (3.1). Para discutir esse resultado, é necessário primeiro apresentar dois teoremas clássicos da teoria de sequências encadeadas positivas, que podem ser encontrados, por exemplo, em Chihara [7] (veja, respectivamente, Teorema 3.1 e Teorema 6.2 (critério de Wall) dados no Capítulo III), a saber:

Teorema 3.1 ([7]) *Seja $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$. Então,*

$$1 - \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \dots - \frac{d_n}{1} - \dots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + F},$$

onde

$$F = \sum_{n=1}^\infty \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Teorema 3.2 ([7]) *Dada uma sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, se $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, então, ela será maximal se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{M_1 M_2 \cdots M_n}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_n)} = \infty.$$

Com base nos Teoremas 3.2 e 3.1, é possível, agora, enunciar o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Sejam $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ sequências de polinômios gerados, respectivamente, pelas relações de recorrência de três termos (1.5) e (3.2), a partir do par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, onde $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência encadeada positiva. Nessas condições, tem-se que*

$$d_1 = \frac{Q_1(1)}{R_1(1)} < \frac{Q_2(1)}{R_2(1)} < \dots < \frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} < \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1 - M_0) \quad (3.3)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0). \quad (3.4)$$

Demonstração: Observe que fazendo $z = 1$ na expressão em fração contínua (3.1) e, em seguida, realizando um simples processo de fatoração da fração contínua obtida, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} &= \frac{2d_1}{2} - \frac{4d_2}{2} - \frac{4d_3}{2} - \dots - \frac{4d_n}{2} \\ &= \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \frac{d_3}{1} - \dots - \frac{d_n}{1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dessa forma, se A_n/B_n denota o n -ésimo convergente da fração contínua

$$1 - \frac{d_1}{1} - \frac{d_2}{1} - \frac{d_3}{1} - \dots - \frac{d_n}{1} - \dots,$$

então, por (3.5), tem-se

$$\frac{A_n}{B_n} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}. \quad (3.6)$$

Logo, se $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros maximal para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, então, utilizando a igualdade (3.6) e os Teoremas 3.2 e 3.1, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = M_0 + \frac{1 - M_0}{1 + F}, \quad (3.7)$$

onde

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_1 M_2 \cdots M_k}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_k)} = \infty.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0),$$

o que representa o resultado (3.4) do lema.

Para verificar o resultado apresentado em (3.3), basta observar que, de (3.6) e (3.7) (veja também a prova do Lema 3.2, p.83 em [7]), pode-se escrever

$$\frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = 1 - \frac{A_n}{B_n} = 1 - \left[M_0 + \frac{1 - M_0}{1 + F_n} \right] = (1 - M_0) \frac{F_n}{1 + F_n}, \quad n \geq 1, \quad (3.8)$$

onde, para $n \geq 1$,

$$F_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_1 M_2 \cdots M_k}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_k)} < \infty.$$

Neste caso, como $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros maximal para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, então $d_n = (1 - M_{n-1})M_n$, com $0 \leq M_0 < 1$ e $0 < M_n < 1$ para $n \geq 1$, de onde segue que cada parcela da soma F_n é tal que $F_n > 0$. Portanto, para $n \geq 2$, $F_{n-1} < F_n$ e, conseqüentemente, $F_{n-1}(1 + F_n) < F_n(1 + F_{n-1})$ ou ainda, usando (3.8),

$$\frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} = (1 - M_0) \frac{F_{n-1}}{1 + F_{n-1}} < (1 - M_0) \frac{F_n}{1 + F_n} = \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}, \quad n \geq 2.$$

Finalmente, por (3.5) e (3.8), tem-se, respectivamente, que

$$\frac{Q_1(1)}{R_1(1)} = d_1 \quad \text{e} \quad \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1 - M_0) \frac{F_n}{1 + F_n} < (1 - M_0), \quad n \geq 1,$$

e isto conclui a prova do lema. ■

O próximo lema dessa seção lida com as expansões em séries das funções racionais do tipo $Q_n(z)/R_n(z)$, as quais serão discutidas daqui em diante. Observe que, da fórmula de recorrência de três termos para os polinômios $R_n(z)$ (dada em (1.5)), se $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$, então é possível verificar que

$$R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,n-j} z^j = R_n^*(z), \quad n \geq 0. \tag{3.9}$$

Em particular, valem as seguintes igualdades

$$r_{0,0} = 1 \quad \text{e} \quad r_{n,n} = \bar{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k), \quad n \geq 1, \tag{3.10}$$

onde $R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}$ representa o polinômio recíproco de $R_n(z)$. De fato, uma vez que

$$\overline{R_n(1/\bar{z})} = \overline{\sum_{j=0}^n r_{n,j} (1/\bar{z})^j} = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,j} (1/z)^j,$$

tem-se

$$\begin{aligned} R_n^*(z) &= z^n \overline{R(1/\bar{z})} = z^n \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,j} (1/z)^j \\ &= \bar{r}_{n,0} z^n + \bar{r}_{n,1} z^{n-1} + \dots + \bar{r}_{n,n} z^0 = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,n-j} z^j. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de recorrência (1.5), em que $R_0(z) = 1$ (de onde segue que $r_{0,0} = 1$) e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, obtém-se, respectivamente, que

$$\begin{aligned} R_2(z) &= [(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)]R_1(z) - 4d_2zR_0(z) \\ &= [(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)][(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)] - 4d_2z \\ &= \prod_{k=1}^2(1 + ic_k)z^2 + a_1z + \prod_{k=1}^2(1 - ic_k), \quad \text{onde } a_1 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(z) &= [(1 + ic_3)z + (1 - ic_3)]R_2(z) - 4d_3zR_1(z) \\ &= [(1 + ic_3)z + (1 - ic_3)] \left[\prod_{k=1}^2(1 + ic_k)z^2 + a_1z + \prod_{k=1}^2(1 - ic_k) \right] \\ &\quad - 4d_3z[(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)] \\ &= \prod_{k=1}^3(1 + ic_k)z^3 + [b_2z^2 + b_1z] + \prod_{k=1}^3(1 - ic_k), \quad \text{onde } b_1, b_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Consequentemente, por recorrência, vale

$$R_n(z) = \prod_{k=1}^n(1 + ic_k)z^n + [w_{n-1}z^{n-1} + w_{n-2}z^{n-2} + \dots + w_1z] + \prod_{k=1}^n(1 - ic_k),$$

onde $w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_1 \in \mathbb{C}$. Assim,

$$r_{n,n} = \prod_{k=1}^n(1 + ic_k) = \overline{\prod_{k=1}^n(1 - ic_k)} = \bar{r}_{n,0}, \quad n \geq 1.$$

Finalmente a igualdade entre os polinômios $R_n(z)$ e $R_n^*(z)$, isto é,

$$R_n(z) = R_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

segue do fato desses polinômios satisfazerem a mesma fórmula de recorrência de três termos (dada em (1.5)) e com as mesmas condições iniciais, já que

$$R_0^*(z) = z^0 \overline{R_0(1/\bar{z})} = 1 = R_0(z),$$

$$\begin{aligned} R_1^*(z) &= z^1 \overline{R_1(1/\bar{z})} = z \overline{[(1 + ic_1)(1/\bar{z}) + (1 - ic_1)]} \\ &= z[(1 - ic_1)(1/z) + (1 + ic_1)] = R_1(z). \end{aligned}$$

Com efeito, pela relação de recorrência (1.5),

$$R_{n+1}(1/\bar{z}) = [(1 + ic_{n+1})(1/\bar{z}) + (1 - ic_{n+1})]R_n(1/\bar{z}) - 4d_{n+1}(1/\bar{z})R_{n-1}(1/\bar{z}),$$

ou ainda,

$$\overline{R_{n+1}(1/\bar{z})} = [(1 - ic_{n+1})(1/z) + (1 + ic_{n+1})]\overline{R_n(1/\bar{z})} - 4d_{n+1}(1/z)\overline{R_{n-1}(1/\bar{z})},$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} z^{n+1}\overline{R_{n+1}(1/\bar{z})} &= [(1 - ic_{n+1})(1/z) + (1 + ic_{n+1})]z \left[z^n \overline{R_n(1/\bar{z})} \right] \\ &\quad - 4d_{n+1}(1/z)z^2 \left[z^{n-1} \overline{R_{n-1}(1/\bar{z})} \right], \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$R_{n+1}^*(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n^*(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1,$$

com as condições iniciais $R_0^*(z) = 1 = R_0(z)$ e $R_1^*(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1) = R_1(z)$.

Polinômios que satisfazem a propriedade (3.9) são conhecidos na literatura como polinômios auto-inversivos. Dessa forma, os polinômios R_n , $n \geq 0$, são polinômios auto-inversivos. Analogamente, os polinômios Q_n de grau $n - 1$ ($n \geq 1$), os quais também satisfazem uma relação de recorrência de três termos do tipo (1.5) (veja (3.2)) com condições iniciais $Q_1(z) = 2d_1$ e $Q_2(z) = 2d_1[(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)]$, são polinômios auto-inversivos, ou seja,

$$Q_n^*(z) = z^{n-1}\overline{Q_n(1/\bar{z})} = Q_n(z), \quad n \geq 1.$$

Observe que aplicando a fórmula do determinante (veja [26]) para a fração contínua expressa de $Q_n(z)/R_n(z)$ (fornecida em (3.1)), e considerando

$$U_n(z) = \begin{vmatrix} Q_n(z) & R_n(z) \\ Q_{n-1}(z) & R_{n-1}(z) \end{vmatrix} = Q_n(z)R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1, \quad (3.11)$$

tem-se $U_1(z) = 2d_1$ e

$$U_{n+1}(z) = 4d_{n+1}zU_n(z) = 2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1}z^n, \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Com efeito, uma vez que $Q_0(z) = 0$, $Q_1(z) = 2d_1$ e $R_0(z) = 1$ (veja condições iniciais para as relações de recorrência de três termos de $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ dadas, respectivamente, por (1.5) e (3.2)), obtém-se

$$U_1(z) = Q_1(z)R_0(z) - Q_0(z)R_1(z) = 2d_1 \cdot 1 - 0 \cdot R_1(z) = 2d_1.$$

Além disso, uma aplicação direta da fórmula do determinante na fração contínua (3.1), fornece para todo $n \geq 1$, que

$$\begin{aligned} U_{n+1}(z) &= Q_{n+1}(z)R_n(z) - Q_n(z)R_{n+1}(z) \\ &= (-1)^{[(n+1)+1]}(2d_1)(-4d_2z) \cdots (-4d_nz)(-4d_{n+1}z) = 4d_{n+1}zU_n(z), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} U_{n+1}(z) &= 4d_{n+1}z(-1)^{n+1}(2d_1)(-4d_2z) \cdots (-4d_nz) \\ &= 4d_{n+1}z(-1)^{n+1}[2(-1)^{n-1}4^{n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}] = 2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1}z^n. \end{aligned}$$

Agora, considerando expansões em séries em torno da origem e do infinito, utilizando (3.12), é possível afirmar que

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}}z^{n-1} + O_1(z^n) \\ \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}\frac{1}{z^n} + O_2((1/z)^{n+1}) \end{cases}, \quad n \geq 1, \quad (3.13)$$

onde, para $n \geq 1$, denota-se $\gamma_{n-1} := (2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n)/r_{n,n}$,

$$O_1(z^n) := l_nz^n + l_{n+1}z^{n+1} + \cdots, \quad l_{n-1+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N},$$

e

$$O_2((1/z)^{n+1}) := \tilde{l}_{n+1}(1/z)^{n+1} + \tilde{l}_{n+2}(1/z)^{n+2} + \cdots, \quad \tilde{l}_{n+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aqui, considera-se expansões em séries em torno da origem e do infinito do tipo

$$\frac{1}{1 - \tilde{z}} = 1 + \tilde{z} + \tilde{z}^2 + \cdots, \quad e \quad \frac{1}{1 - (1/\tilde{w})} = 1 + (1/\tilde{w}) + (1/\tilde{w})^2 + \cdots,$$

em que $|\tilde{z}| < 1$ e $|1/\tilde{w}| < 1$. De fato, utilizando (3.11), (3.12) e levando-se em consideração que, para $n \geq 0$, $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j}z^j$, e que, por (3.10), $r_{n,n} = \bar{r}_{n,0}$ para $n \geq 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{U_n(z)}{R_n(z)R_{n-1}(z)} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n r_{n,j}z^j\right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_{n-1,j}z^j\right)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0} + (r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0})z + \cdots + r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1}} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_nz^{n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0} \left(1 + \frac{r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}z + \cdots + \frac{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}z^{2n-1}\right)}. \end{aligned}$$

Observe que a igualdade obtida acima é equivalente a

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} \\
 &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{\bar{r}_{n,n}\bar{r}_{n-1,n-1}} \left[\frac{1}{1 - (\tilde{r}_1 z + \cdots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1})} \right] \\
 &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} \left[1 + (\tilde{r}_1 z + \cdots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1}) + (\tilde{r}_1 z + \cdots + \tilde{r}_{2n-1} z^{2n-1})^2 + \cdots \right] \\
 &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + l_n z^n + l_{n+1} z^{n+1} + \cdots \\
 &= \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + O_1(z^n),
 \end{aligned}$$

onde

$$l_n = \tilde{r}_1 \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}}, \quad l_{n+1} = (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_1^2) \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}}, \quad \dots,$$

e, de modo geral, $l_{n+k} \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$, com

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_1 &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,1} + r_{n,1}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}, \\
 \tilde{r}_2 &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,2} + r_{n,1}r_{n-1,1} + r_{n,2}r_{n-1,0}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}, \\
 &\vdots \\
 \tilde{r}_{2n-1} &= -\frac{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}{r_{n,0}r_{n-1,0}}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, também é possível obter a igualdade

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{U_n(z)}{R_n(z)R_{n-1}(z)} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)} \\
 &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1} + (r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2})z^{2n-2} + \cdots + r_{n,0}r_{n-1,0}} \\
 &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}z^{2n-1} \left(1 + \frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^{2n-1}} \right)} \\
 &= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left[\frac{1}{1 + \frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^{2n-1}}} \right].
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left\{ \frac{1}{1 - \left[\tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right]} \right\} \\
 &= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} \left\{ 1 + \left[\tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right] + \left[\tilde{w}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \tilde{w}_{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} \right]^2 + \cdots \right\} \\
 &= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + \tilde{l}_{n+1} (1/z)^{n+1} + \tilde{l}_{n+2} (1/z)^{n+2} + \cdots \\
 &= \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + O_2((1/z)^{n+1}),
 \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{l}_{n+1} = \tilde{w}_1 \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}, \quad \tilde{l}_{n+2} = (\tilde{w}_2 + \tilde{w}_1^2) \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}, \dots,$$

e, de modo geral, $l_{n+k} \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$, com

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_1 &= -\frac{r_{n,n-1}r_{n-1,n-1} + r_{n,n}r_{n-1,n-2}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}, \\
 \tilde{w}_2 &= -\frac{r_{n,n}r_{n-1,n-3} + r_{n,n-1}r_{n-1,n-2} + r_{n,n-2}r_{n-1,n-1}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}, \\
 &\vdots \\
 \tilde{w}_{2n-1} &= -\frac{r_{n,0}r_{n-1,0}}{r_{n,n}r_{n-1,n-1}}.
 \end{aligned}$$

A igualdade estabelecida em (3.13) significa que existem expansões formais em séries $E_0(z)$ e $E_\infty(z)$, respectivamente em torno da origem e em torno do infinito, tais que

$$E_0(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_1(z^{n+1}), \quad n \geq 0, \quad (3.14)$$

e

$$E_\infty(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O_2((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 0. \quad (3.15)$$

Por razões que serão esclarecidas mais adiante, definiu-se

$$E_0(z) := -v_1 - v_2 z - v_3 z^2 - v_4 z^3 - \dots \quad (3.16)$$

e

$$E_\infty(z) := \frac{v_0}{z} + \frac{v_{-1}}{z^2} + \frac{v_{-2}}{z^3} + \frac{v_{-3}}{z^4} + \cdots . \quad (3.17)$$

Agora, como R_n e Q_n são polinômios auto-inversivos, segue de (3.15) que

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Com efeito, por hipótese, $R_n(z) = R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}$ e $Q_n(z) = Q_n^*(z) = z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})}$. Logo, considerando a igualdade em (3.15), para $n \geq 0$, tem-se

$$E_\infty(1/\bar{z}) - \frac{Q_n(1/\bar{z})}{R_n(1/\bar{z})} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{(1/\bar{z})^{n+1}} + O_2(\bar{z}^{n+2}).$$

Consequentemente

$$\overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{\overline{Q_n(1/\bar{z})}}{\overline{R_n(1/\bar{z})}} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^{n+1} + O_2(z^{n+2}),$$

de onde segue que

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})}}{z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}),$$

ou seja,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_2(z^{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Comparando a última igualdade com (3.14) tem-se, então, a propriedade simétrica

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} = E_0(z),$$

a qual garante que

$$v_j = -\bar{v}_{-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

Isto ocorre, uma vez que, de (3.17), tem-se

$$E_\infty(1/\bar{z}) = v_0 \bar{z} + v_{-1} \bar{z}^2 + v_{-2} \bar{z}^3 + v_{-3} \bar{z}^4 + \cdots ,$$

ou, equivalentemente,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} = \bar{v}_0 + \bar{v}_{-1} z + \bar{v}_{-2} z^2 + \bar{v}_{-3} z^3 + \cdots .$$

Daí, como vale a propriedade simétrica $z^{-1}\overline{E_\infty(1/\bar{z})} = E_0(z)$, pode-se concluir, por (3.16), que

$$\bar{v}_0 + \bar{v}_{-1}z + \bar{v}_{-2}z^2 + \bar{v}_{-3}z^3 + \dots = -v_1 - v_2z - v_3z^2 - v_4z^3 - \dots .$$

Finalmente, o resultado em (3.18) é estabelecido quando se compara, respectivamente, os coeficientes de z^n , $n \geq 0$, na última igualdade.

Considerando agora a igualdade em (3.14), tem-se

$$E_0(z)R_n(z) - Q_n(z) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}}z^n R_n(z) + O_3(z^{n+1}), \quad (3.19)$$

onde $O_3(z^{n+1}) := O_1(z^{n+1})R_n(z)$. Consequentemente, como $E_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} -v_j z^{j-1}$ (veja (3.16)), denotando $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$ e $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j$, a igualdade em (3.19) pode ser reescrita como

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} -v_j z^{j-1} \right) \left(\sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) - \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n \left(\sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) + O_3(z^{n+1}),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & (-v_1 z^0 - v_2 z^1 - \dots - v_{n+1} z^n - \dots)(r_{n,0} z^0 + r_{n,1} z^1 + \dots + r_{n,n} z^n) \\ & \quad - (q_{n,0} z^0 + q_{n,1} z^1 + \dots + q_{n,n-1} z^{n-1}) \\ & = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} (r_{n,0} z^n + r_{n,1} z^{n+1} + \dots + r_{n,n} z^{2n}) + O_3(z^{n+1}). \end{aligned}$$

Assim, comparando-se os coeficientes de z^0 em ambos os membros da equação acima, obtém-se

$$-v_1 r_{n,0} - q_{n,0} = 0.$$

Para os coeficientes de z^1 , tem-se

$$-v_2 r_{n,0} - v_1 r_{n,1} - q_{n,1} = 0.$$

Seguindo o mesmo procedimento até z^{n-1} , conclui-se que

$$-v_n r_{n,0} - \dots - v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1} = 0.$$

Já em relação aos coeficientes de z^n , tem-se

$$-v_{n+1} r_{n,0} - \dots - v_2 r_{n,n-1} - v_1 r_{n,n} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} r_{n,0} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} \bar{r}_{n,n} = \bar{\gamma}_n,$$

onde a igualdade $r_{n,0} = \bar{r}_{n,n}$ é consequência do resultado obtido em (3.10).

Dessa forma, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -v_1 r_{n,0} & -q_{n,0} & & = 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -v_n r_{n,0} & \cdots & -v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1} & = 0 \\ -v_{n+1} r_{n,0} & \cdots & -v_2 r_{n,n-1} - v_1 r_{n,n} & = \bar{\gamma}_n \end{cases} \quad (3.20)$$

De modo análogo, considerando $O_4((1/z)^2) := O_2((1/z)^{n+2})R_n(z)$, a igualdade em (3.15), fornece

$$E_\infty(z)R_n(z) - Q_n(z) = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} R_n(z) + O_4((1/z)^2). \quad (3.21)$$

Consequentemente, como $E_\infty(z) = \sum_{j=1}^\infty v_{-j+1} z^{-j}$ (veja (3.17)), sendo $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$ e $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j$, é possível reescrever a igualdade (3.21) da seguinte forma

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \frac{v_{-j+1}}{z^j} \right) \left(\sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) - \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} \left(\sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j \right) + O_4((1/z)^2),$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_0}{z} + \frac{v_{-1}}{z^2} + \cdots + \frac{v_{-n}}{z^{n+1}} + \cdots \right) (r_{n,0} + r_{n,1}z + \cdots + r_{n,n}z^n) \\ & \quad - (q_{n,0} + q_{n,1}z + \cdots + q_{n,n-1}z^{n-1}) \\ & = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \left(\frac{r_{n,0}}{z^{n+1}} + \frac{r_{n,1}}{z^n} + \cdots + \frac{r_{n,n}}{z} \right) + O_4((1/z)^2). \end{aligned}$$

Daí, comparando-se os coeficientes de $(1/z) = z^{-1}$ em ambos os lados desta última equação, obtém-se

$$v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} r_{n,n} = \gamma_n.$$

De igual modo, para os coeficientes de z^0 , tem-se

$$v_0 r_{n,1} + v_{-1} r_{n,2} + \cdots + v_{-(n-1)} r_{n,n} - q_{n,0} = 0.$$

Seguindo o mesmo procedimento até z^{n-1} , chega-se à igualdade

$$v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} = 0.$$

Assim, obtém-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} = \gamma_n \\ v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} - q_{n,0} = 0 \\ \vdots \\ v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} = 0 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Note que a última equação do sistema (3.20) e a primeira do sistema (3.22) são as mesmas, já que por (3.9) tem-se, para $n \geq 0$, $r_{n,j} = \bar{r}_{n,n-j}$, $j \geq 0$, e, por (3.18), tem-se $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$, $j \geq 1$.

Agora, a partir dos sistemas de equações (3.20) e (3.22), é possível observar que

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)}} r_{n,n} \quad n \geq 1, \quad (3.23)$$

onde

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} v_m & v_{m+1} & \cdots & v_{m+n-1} \\ v_{m+1} & v_{m+2} & \cdots & v_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m+n-1} & v_{m+n} & \cdots & v_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad (3.24)$$

são os determinantes de Hankel associados com a sequência dupla $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Com efeito, subtraindo-se membro a membro as equações de (3.20) que contêm os termos $-q_{n,0}, -q_{n,1}, \dots, -q_{n,n-1}$ das respectivas equações de (3.22) que contêm esses mesmos termos, obtém-se o sistema (acrescentado da primeira equação de (3.22))

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} = \gamma_n \\ v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} - q_{n,0} - (-v_1 r_{n,0} - q_{n,0}) = 0 \\ \vdots \\ v_0 r_{n,n} - q_{n,n-1} - (-v_n r_{n,0} - \cdots - v_1 r_{n,n-1} - q_{n,n-1}) = 0 \end{array} \right. ,$$

ou, de forma equivalente, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \cdots + v_{-n} r_{n,n} = \gamma_n \\ v_1 r_{n,0} + v_0 r_{n,1} + \cdots + v_{-n+1} r_{n,n} = 0 \\ \vdots \\ v_n r_{n,0} + v_{n-1} r_{n,1} + \cdots + v_0 r_{n,n} = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Observe que, na forma matricial, o sistema obtido em 3.25 pode, ainda, ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} v_{-n} & \cdots & v_{-1} & v_0 \\ v_{-n+1} & \cdots & v_0 & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_0 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n,n} \\ \vdots \\ r_{n,1} \\ r_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas, pela regra de Cramer, considerando $H_{n+1}^{(-n)}$ definido como em (3.24), tem-se

$$r_{n,n} = \frac{1}{H_{n+1}^{(-n)}} \begin{vmatrix} \gamma_n & v_{-n+1} & \cdots & v_{-1} & v_0 \\ 0 & v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$r_{n,n} = \frac{\gamma_n}{H_{n+1}^{(-n)}} \begin{vmatrix} v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ v_{-n+3} & \cdots & v_1 & v_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} = \frac{\gamma_n}{H_{n+1}^{(-n)}} H_n^{(-n+2)}, \quad (3.26)$$

onde a última igualdade é consequência de (3.24) quando se considera $m = -n + 2$ para se obter $H_n^{(-n+2)}$.

Por outro lado, uma vez que $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$, $j \geq 1$ (veja (3.18)), tem-se

$$\begin{aligned} H_n^{(-n+2)} &= \begin{vmatrix} v_{-n+2} & \cdots & v_0 & v_1 \\ v_{-n+3} & \cdots & v_1 & v_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{v}_{n-1} & \cdots & -\bar{v}_1 & -\bar{v}_0 \\ -\bar{v}_{n-2} & \cdots & -\bar{v}_0 & -\bar{v}_{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\bar{v}_0 & \cdots & -\bar{v}_{-n+2} & -\bar{v}_{-n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} \bar{v}_{n-1} & \cdots & \bar{v}_1 & \bar{v}_0 \\ \bar{v}_{n-2} & \cdots & \bar{v}_0 & \bar{v}_{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{-n+2} & \bar{v}_{-n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \bar{v}_{-n+1} & \bar{v}_{-n+2} & \cdots & \bar{v}_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_{-1} & \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{n-2} \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_{n-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde as duas últimas igualdades são consequências das propriedades de determinantes. Assim, considerando-se

$$\overline{H}_n^{(-n+1)} = \begin{vmatrix} v_{-n+1} & v_{-n+2} & \cdots & v_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{-1} & v_0 & \cdots & v_{n-2} \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{v}_{-n+1} & \bar{v}_{-n+2} & \cdots & \bar{v}_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_{-1} & \bar{v}_0 & \cdots & \bar{v}_{n-2} \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_{n-1} \end{vmatrix},$$

conclui-se que

$$H_n^{(-n+2)} = (-1)^n \overline{H_n^{(-n+1)}},$$

de onde segue, por (3.26), que

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{\overline{H_n^{(-n+1)}}} r_{n,n}, \quad n \geq 1,$$

e isto é exatamente o resultado afirmado em (3.23).

Diante do exposto, é possível agora estabelecer o seguinte lema:

Lema 3.4 *Sejam $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ as seqüências de polinômios obtidas da seqüência real $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ e das respectivas fórmulas de recorrência de três termos (1.5) e (3.2). Então, as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$ satisfazem as correspondentes propriedades dadas por (3.14) e (3.15). Além disso, se o funcional de momento \mathcal{N} é tal que*

$$\mathcal{N} [\zeta^{-n}] = v_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.27)$$

então os polinômios $R_n(z)$ satisfazem

$$\mathcal{N} [\zeta^{-n+j} R_n(\zeta)] = \begin{cases} -\overline{\gamma}_n, & \text{se } j = -1 \\ 0, & \text{se } j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n, & \text{se } j = n \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (3.28)$$

onde $\gamma_0 = v_0 = \frac{2d_1}{1 + ic_1}$ e $\gamma_n = \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}} \gamma_{n-1}$, para $n \geq 1$.

Demonstração: A primeira parte do lema, isto é, que as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$ satisfazem as correspondentes propriedades dadas por (3.14) e (3.15), segue da construção estabelecida após a prova do Lema (3.3) até a obtenção das referidas propriedades. Resta provar as relações de ortogonalidades (3.28), satisfeitas pelos polinômios $R_n(z)$, em relação ao funcional de momento \mathcal{N} . Para isso, utiliza-se, novamente, o sistema (3.25) (obtido de (3.20) e (3.22)), porém, desta vez, incluindo-se a última equação de (3.20) em (3.25), isto é, considerando o sistema

$$\begin{cases} v_0 r_{n,0} + v_{-1} r_{n,1} + \dots + v_{-n} r_{n,n} & = \gamma_n \\ v_1 r_{n,0} + v_0 r_{n,1} + \dots + v_{-n+1} r_{n,n} & = 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ v_n r_{n,0} + v_{n-1} r_{n,1} + \dots + v_0 r_{n,n} & = 0 \\ v_{n+1} r_{n,0} + v_n r_{n,1} + \dots + v_1 r_{n,n} & = -\overline{\gamma}_n \end{cases},$$

e observando que $R_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n r_{n,k}\zeta^k$, obtém-se, por (3.27), que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\zeta^{-n+j}R_n(\zeta)] &= \mathcal{N}\left[\zeta^{-n+j}\sum_{k=0}^n r_{n,k}\zeta^k\right] = \mathcal{N}\left[\sum_{k=0}^n r_{n,k}\zeta^{-n+j+k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^n r_{n,k}\mathcal{N}[\zeta^{-n+j+k}] = \sum_{k=0}^n r_{n,k}v_{n-j-k} \\ &= r_{n,0}v_{n-j} + r_{n,1}v_{n-j-1} + \cdots + r_{n,n}v_{-j} \\ &= \begin{cases} -\bar{\gamma}_n, & \text{se } j = -1 \\ 0, & \text{se } j = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1. \\ \gamma_n, & \text{se } j = n \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, considerando $n = 0$ na primeira equação do sistema acima, tem-se $\gamma_0 = r_{0,0}v_0 = v_0$, já que, por (3.10), $r_{0,0} = 1$. Consequentemente, como $\gamma_{n-1} = (2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n)/r_{n,n}$ para $n \geq 1$ (veja (3.13)), e, por (3.10), $r_{1,1} = 1 + ic_1$, conclui-se que

$$v_0 = \gamma_0 = \frac{2d_1}{r_{1,1}} = \frac{2d_1}{1 + ic_1}.$$

Finalmente, usando-se, mais uma vez, a definição de γ_k ($k \geq 0$) e a igualdade em (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 2^{2(n+1)-1} \frac{d_1d_2 \cdots d_{n+1}}{r_{n+1,n+1}} = 2^{2n+2-1} \frac{d_1d_2 \cdots d_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1 + ic_k)} \\ &= 2^2 d_{n+1} \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n}{(1 + ic_{n+1}) \prod_{k=1}^n(1 + ic_k)} = \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}} \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n}{r_{n,n}} \\ &= \frac{4d_{n+1}}{1 + ic_{n+1}} \gamma_{n-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

e isto conclui a prova do lema. ■

Observação 3.5 *A existência do funcional de momento \mathcal{N} tal que, para $0 \leq j < n$, $\mathcal{N}[\zeta^{-n+j}R_n(\zeta)] = 0$ (onde os polinômios $R_n(z)$ são aqueles gerados pela relação de recorrência (1.5)), segue também de Ismail e Masson [13, Teorema 2.1]. Os autores em [13] consideram a fórmula de recorrência da forma*

$$\hat{R}_n(z) = (z - \beta_n^{(1)})\hat{R}_{n-1}(z) - \beta_n^{(2)}(z - \beta_n^{(3)})\hat{R}_{n-2}(z), \quad n \geq 1,$$

com $\hat{R}_{-1}(z) = 0$ e $\hat{R}_1(z) = 1$, a qual é reduzida para a fórmula de recorrência do tipo considerado no presente texto quando $\{\beta_n^{(3)}\}_{n=1}^\infty$ é a sequência nula. Para comparar exatamente com a fórmula de recorrência (1.5), pode-se ainda impor outras restrições sobre as sequências $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ e $\{\beta_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty$. Por exemplo, a restrição sobre $\{\beta_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ é $|\beta_n^{(1)}| = 1$ para $n \geq 1$. De [13, Teorema 2.3], junto com o fato de que os zeros de R_n são todos simples e pertencem ao círculo unitário $|z| = 1$, pode-se deduzir que o funcional de momento \mathcal{N} pode ser escrito como $\mathcal{N}[f] = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\alpha(\zeta)$. Com as condições específicas assumidas em (1.5), será estabelecido na próxima seção que $d\alpha(\zeta) = (1 - \zeta) d\mu(\zeta)$, onde $d\mu(\zeta)$ é uma medida positiva no círculo unitário.

4 A medida no círculo unitário μ e o respectivo funcional de momento \mathcal{M}

Dadas as sequências de polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$, obtidas da sequência real $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ e das respectivas fórmulas de recorrência de três termos (1.5) e (3.2), considere $\{A_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{B_n(z)\}_{n=0}^\infty$ sequências de polinômios tais que

$$A_n(z) := R_n(z) - Q_n(z) \quad \text{e} \quad B_n(z) := (z - 1)R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (4.1)$$

Neste caso, tem-se

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{1}{z - 1} \left[\frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right], \quad n \geq 0. \quad (4.2)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= \frac{R_{n+1}(z) - Q_{n+1}(z)}{(z - 1)R_{n+1}(z)} - \left[\frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z - 1)R_n(z)} \right] \\ &= -\frac{1}{z - 1} \left[\frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right]. \end{aligned}$$

Daí, de (3.13), segue que

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_5(z^{n+1}) \\ -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}) \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad (4.3)$$

onde, para $n \geq 0$, $\gamma_n = (2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1})/r_{n+1,n+1}$,

$$O_5(z^{n+1}) := h_{n+1}z^{n+1} + h_{n+2}z^{n+2} + \cdots, \quad h_{n+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N},$$

e

$$O_6((1/z)^{n+3}) := \tilde{h}_{n+3}(1/z)^{n+3} + \tilde{h}_{n+4}(1/z)^{n+4} + \cdots, \quad \tilde{h}_{n+2+k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De fato, considerando-se expansões em séries em torno da origem e do infinito do tipo

$$\frac{1}{1-\tilde{z}} = 1 + \tilde{z} + \tilde{z}^2 + \cdots, \quad e \quad \frac{(1/\tilde{w})}{1-(1/\tilde{w})} = (1/\tilde{w}) + (1/\tilde{w})^2 + (1/\tilde{w})^3 + \cdots$$

(em que $|\tilde{z}| < 1$ e $|1/\tilde{w}| < 1$), utilizando (3.13) e a igualdade em (4.2), tem-se, para $n \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= -\frac{1}{z-1} \left[\frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right] \\ &= \frac{1}{1-z} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_1(z^{n+1}), \\ &\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O_2((1/z)^{n+2}), \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &(1+z+z^2+\cdots) \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + (1+z+z^2+\cdots) O_1(z^{n+1}), \\ &[-(1/z) - (1/z)^2 - (1/z)^3 - \cdots] \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} \\ &\quad + [-(1/z) - (1/z)^2 - (1/z)^3 - \cdots] O_2((1/z)^{n+2}), \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + h_{n+1}z^{n+1} + h_{n+2}z^{n+2} + \cdots, \\ &-\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + \tilde{h}_{n+3}(1/z)^{n+3} + \tilde{h}_{n+4}(1/z)^{n+4} + \cdots, \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O_5(z^{n+1}) \\ &-\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}) \end{aligned} \right. , \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} + l_{n+1}, & h_{n+2} &= \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} + l_{n+1} + l_{n+2}, \quad \dots, \\ \tilde{h}_{n+3} &= -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} - \tilde{l}_{n+2}, & \tilde{h}_{n+4} &= -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} - \tilde{l}_{n+2} - \tilde{l}_{n+3}, \quad \dots, \end{aligned}$$

e, de modo geral, $h_{n+k}, \tilde{h}_{n+2+k} \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$, com l_{n+k} e \tilde{l}_{n+1+k} dados como na prova de (3.13).

Com os resultados da seção anterior e do início desta seção é possível, agora, estabelecer um dos principais resultados apresentados no trabalho de Castillo et al. [6], o qual configura-se, também, como o primeiro passo em direção ao alcance do objetivo principal do presente artigo, a saber: obter uma única medida de probabilidade não trivial no círculo unitário associada ao par de seqüências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ (que está conectado à relação de recorrência de três termos (1.5) satisfeita pelos polinômios $R_n(z)$) de tal modo que $\{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}$ representa a seqüência de polinômios ortogonais com relação a essa medida, sendo $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ a seqüência de parâmetros minimal da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$.

Teorema 4.1 *Associado ao par de seqüências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ existe uma única medida de probabilidade não trivial μ no círculo unitário. Se $M_0 > 0$, onde $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ é a seqüência de parâmetros maximal de $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, então μ tem um ponto puro com massa M_0 em $z = 1$. Além disso, se \mathcal{N} é o funcional de momento associado à $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ como no Lema 3.4, então*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}(1 - \zeta)d\mu(\zeta), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Demonstração: De (4.3) tem-se que existem expansões em séries $F_0(z)$ e $F_\infty(z)$ tais que

$$F_0(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}}z^n + O_5(z^{n+1}), \quad n \geq 0 \tag{4.4}$$

e

$$F_\infty(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}}\frac{1}{z^{n+2}} + O_6((1/z)^{n+3}), \quad n \geq 0. \tag{4.5}$$

Logo, definindo

$$F_0(z) := -\mu_1 - \mu_2z - \mu_3z^2 - \mu_4z^3 - \dots, \tag{4.6}$$

e

$$F_\infty(z) := \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \frac{\mu_{-3}}{z^4} + \dots, \tag{4.7}$$

tem-se então, de (3.14), (3.15), (4.1), (4.4) e (4.5), que os números μ_k satisfazem

$$\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^n v_j, \quad \mu_{-n} = 1 - \sum_{j=1}^n v_{-j+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{4.8}$$

com $\mu_0 = 1$. Com efeito, de (4.1), segue que

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)}. \quad (4.9)$$

Conseqüentemente, utilizando (3.14) e (4.4), obtém-se

$$F_0(z) - \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n - O_5(z^{n+1}) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \left[E_0(z) - \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n - O_1(z^{n+1}) \right],$$

ou, equivalentemente,

$$(z-1)F_0(z) - 1 + E_0(z) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^{n+1} + (z-1)O_5(z^{n+1}) + O_1(z^{n+1}).$$

Daí, considerando $E_0(z)$ e $F_0(z)$ definidos, respectivamente, como em (3.16) e (4.6), é possível observar que

$$(\mu_1 - 1 - v_1) + (\mu_2 - \mu_1 - v_2)z + (\mu_3 - \mu_2 - v_3)z^2 + \dots + (\mu_{n+1} - \mu_n - v_{n+1})z^n = O(z^{n+1}),$$

de onde segue (por comparação de coeficientes em ambos os lados da igualdade) que

$$\mu_j - \mu_{j-1} - v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n+1, \quad n \geq 0,$$

com $\mu_0 := 1$. Disto, tem-se

$$\mu_{n+1} - \mu_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (\mu_j - \mu_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} v_j, \quad n \geq 0,$$

ou ainda,

$$\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^n v_j, \quad n \geq 1.$$

De forma semelhante, utilizando (4.9), (3.15) e (4.5), chega-se à igualdade

$$\begin{aligned} F_\infty(z) + \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} - O_6((1/z)^{n+3}) \\ = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} \left[E_\infty(z) - \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} - O_2((1/z)^{n+2}) \right], \end{aligned}$$

a qual implica em

$$(z-1)F_\infty(z) - 1 + E_\infty(z) = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + (z-1)O_6((1/z)^{n+3}) + O_2((1/z)^{n+2}).$$

Conseqüentemente, tomando $E_\infty(z)$ e $F_\infty(z)$ definidos, respectivamente, por (3.17) e (4.7), obtém-se

$$(\mu_0 - 1) + \frac{\mu_{-1} - \mu_0 - v_0}{z} + \frac{\mu_{-2} - \mu_{-1} - v_{-1}}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{-(n+1)} - \mu_{-n} - v_{-n}}{z^{n+1}} = \tilde{O}((1/z)^{n+2}).$$

Observe que, comparando-se os respectivos coeficientes em ambos os membros da última igualdade, pode-se concluir que

$$\mu_{-j} - \mu_{-j+1} + v_{-j+1} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n+1, \quad n \geq 0.$$

com $\mu_0 := 1$. Daí, tem-se

$$\mu_{-(n+1)} - \mu_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (\mu_{-j} - \mu_{-j+1}) = - \sum_{j=1}^{n+1} v_{-j+1}, \quad n \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mu_{-n} = 1 - \sum_{j=1}^n v_{-j+1}, \quad n \geq 1.$$

Agora, uma vez que $v_j = -\bar{v}_{-j+1}$ para $j \geq 1$ (veja (3.18)), é possível concluir-se a partir de (4.8) que

$$\mu_k = 1 + \sum_{j=1}^k v_j = 1 - \sum_{j=1}^k (\bar{v}_{-j+1}) = \overline{1 - \sum_{j=1}^k (v_{-j+1})} = \bar{\mu}_{-k}, \quad k \geq 1.$$

Portanto,

$$\mu_{-k} = \bar{\mu}_k, \quad k \geq 1.$$

Observe que definindo o funcional de momento \mathcal{M} por

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.10)$$

então,

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = 1 - \mathcal{N} \left[\frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.11)$$

Com efeito, de (3.27), tem-se

$$\sum_{j=1}^k v_j = \sum_{j=1}^k \mathcal{N} [\zeta^{-j}] = \mathcal{N} \left[\sum_{j=1}^k \zeta^{-j} \right]. \quad (4.12)$$

Mas, considerando

$$J_k(\zeta) = \sum_{j=1}^k \zeta^{-j} = \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \dots + \zeta^{-k}, \quad (4.13)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} J_k(\zeta) - \zeta^{-1} J_k(\zeta) &= (\zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \dots + \zeta^{-(k-1)} + \zeta^{-k}) \\ &\quad - (\zeta^{-2} + \zeta^{-3} + \dots + \zeta^{-k} + \zeta^{-k-1}) \\ &= \zeta^{-1} - \zeta^{-k-1}. \end{aligned}$$

Daí

$$J_k(\zeta) = \frac{\zeta^{-1} - \zeta^{-k-1}}{1 - \zeta^{-1}} = \frac{1 - \zeta^{-k}}{\zeta - 1} = - \left(\frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right). \quad (4.14)$$

Logo, levando-se em consideração a primeira igualdade em (4.8) e utilizando (4.12), (4.13) e (4.14), conclui-se que

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k = 1 + \sum_{j=1}^k v_j = 1 + \mathcal{N} \left[\sum_{j=1}^k \zeta^{-j} \right] = 1 - \mathcal{N} \left[\frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right],$$

o que representa a igualdade (4.11).

Observe, também, que a partir das relações dadas em (4.8) tem-se

$$v_{-k} = \mu_{-k} - \mu_{-k-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Isto ocorre já que, para $k = 1, 2, \dots$, vale

$$\mu_{-k} - \mu_{-k-1} = \mu_{-k} - \mu_{-(k+1)} = \left[1 - \sum_{j=1}^k v_{-j+1} \right] - \left[1 - \sum_{j=1}^{k+1} v_{-j+1} \right] = v_{-k}$$

e para $k = 0$ e $k = -1$, observa-se, respectivamente, que

$$\mu_0 - \mu_{-1} = 1 - \mu_{-1} = 1 - \left[1 - \sum_{j=1}^1 v_{-j+1} \right] = 1 - (1 - v_0) = v_0,$$

$$\mu_1 - \mu_0 = \mu_1 - 1 = \left[1 + \sum_{j=1}^1 v_j \right] - 1 = (1 + v_1) - 1 = v_1.$$

Além disso, para $k = -1, -2, \dots$, fazendo-se $w = -k = 2, 3, \dots$, obtém-se

$$\mu_{-k} - \mu_{-k-1} = \mu_w - \mu_{w-1} = \left[1 + \sum_{j=1}^w v_j \right] - \left[1 + \sum_{j=1}^{w-1} v_j \right] = v_w = v_{-k}.$$

Dessa forma, os funcionais de momento \mathcal{M} e \mathcal{N} (dados, respectivamente, por (3.27) e (4.10)) satisfazem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\zeta^k(1-\zeta)] &= \mathcal{M}[\zeta^k - \zeta^{k+1}] = \mathcal{M}[\zeta^k] - \mathcal{M}[\zeta^{k+1}] = \mu_{-k} - \mu_{-(k+1)} \\ &= \mu_{-k} - \mu_{-k-1} = v_{-k} = \mathcal{N}[\zeta^k], \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{N}[\zeta^k] = \mathcal{M}[\zeta^k(1-\zeta)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.15)$$

Agora, considerando a decomposição parcial de $A_n(z)/B_n(z)$, tem-se

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z-z_{n,j}}, \quad (4.16)$$

onde $z_{n,j}$, para $j = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $R_n(z)$,

$$\lambda_{n,0} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} \quad \text{e} \quad \lambda_{n,j} = \frac{Q_n(z_{n,j})}{(1-z_{n,j})R'_n(z_{n,j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

De fato, a igualdade em (4.16) é válida se, e somente se,

$$1 - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \lambda_{n,0} + (z-1) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z-z_{n,j}}, \quad z \neq 1.$$

Logo, tomando o limite quando z tende para 1 em ambos os membros da igualdade acima chega-se à primeira relação em (4.17). De modo análogo, a relação (4.16) é verdadeira se, e somente se,

$$\frac{R_n(z) - Q_n(z)}{z-1} = R_n(z) \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + R_n(z) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z-z_{n,j}}, \quad z \neq z_{n,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou ainda,

$$\frac{R_n(z) - Q_n(z)}{z-1} = R_n(z) \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + [R_n(z) - R_n(z_{n,j})] \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z-z_{n,j}}, \quad z \neq z_{n,j},$$

com $j = 1, 2, \dots, n$. Daí, como $R_n(z_{n,j}) = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ (já que $z_{n,j}$ com $j = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $R_n(z)$), tomando o limite quando z tende para $z_{n,j}$ em ambos os membros da última igualdade, obtém-se

$$\frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})} = R'_n(z_{n,j})\lambda_{n,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

o que equivale à segunda relação em (4.17).

Observe que da primeira igualdade em (4.17) e do Lema 3.3, segue imediatamente que

$$1 - d_1 = \lambda_{1,0} > \lambda_{2,0} > \dots > \lambda_{n,0} > \lambda_{n+1,0} > \dots$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0. \tag{4.18}$$

Além disso, da segunda igualdade em (4.17), considerando $V_n(z)$ e $U_n(z)$, respectivamente, como em (2.6) e (3.11) (veja também (3.12)) e levando em consideração que $R_n(z_{n,j}) = 0$ e $R_{n-1}(z_{n,j}) \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ (veja Lema 2.1), é possível observar que, para $j = 1, 2, \dots, n$, vale

$$\lambda_{n,j} = \frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})} = \frac{Q_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})R_{n-1}(z_{n,j})} = \frac{U_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})V_n(z_{n,j})}.$$

Consequentemente, usando a relação (2.7) (obtida no Lema 2.3) e a relação (3.12), tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_{n,j} &= \frac{U_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})V_n(z_{n,j})} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n z_{n,j}^{n-1} z_{n,j}^{-(n-2)} 2^{-(2n-3)}}{(1 - z_{n,j})(z_{n,j} - 1)W_n(x_{n,j})} \\ &= \frac{4d_1d_2 \cdots d_n}{W_n(x_{n,j})} \frac{z_{n,j}}{(1 - z_{n,j})(z_{n,j} - 1)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Aqui, a positividade de $\lambda_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, segue do fato dos Wronskianos $W_n(x)$, definidos em (2.4), satisfazerem $W_n(x_{n,j}) > 0$ nos zeros, $x_{n,j}$, $n \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, de $G_n(x)$ em $[-1, 1]$ (veja (2.5)), do fato da sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ser tal que $d_n > 0$, para $n \geq 1$ (já que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva) e do fato de que, sendo

$z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, então

$$\begin{aligned} \frac{z_{n,j}}{(1-z_{n,j})(z_{n,j}-1)} &= \frac{e^{i\theta_{n,j}}}{(1-e^{i\theta_{n,j}})(e^{i\theta_{n,j}}-1)} \frac{e^{i\theta_{n,j}}}{e^{i\theta_{n,j}}} = \frac{1}{-e^{i\theta_{n,j}}+2-e^{-i\theta_{n,j}}} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})+2-\cos(-\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(-\theta_{n,j})} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta_{n,j})-i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})+2-\cos(\theta_{n,j})+i\operatorname{sen}(\theta_{n,j})} \\ &= \frac{1}{2-2\cos(\theta_{n,j})} = \frac{1}{4\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(\theta_{n,j})}{2}\right]} = \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{n,j}}{2}\right)} > 0, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$, ($n \geq 1$).

Além da positividade dos elementos $\lambda_{n,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, por considerar o limite de $zA_n(z)/B_n(z)$, quando $|z| \rightarrow \infty$, tem-se ainda

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1. \tag{4.19}$$

Com efeito, observe que, de (4.16), por um lado, vale

$$\frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = \frac{z[R_n(z) - Q_n(z)]}{(z-1)R_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)R_n(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} - \frac{Q_n(z)}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)R_n(z)},$$

de onde segue que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = 1 - \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = 1, \tag{4.20}$$

já que, de (3.15) e (3.17), tem-se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} [Q_n(z)/R_n(z)] = 0$. Por outro lado, usando novamente (4.16), obtém-se

$$\frac{zA_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{(z-1)}z + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z-z_{n,j}}z = \frac{\lambda_{n,0}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_{n,j}}{1 - \frac{z_{n,j}}{z}}\right).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{zA_n(z)}{B_n(z)} &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda_{n,0}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{1 - \frac{z_{n,j}}{z}} \right] \\ &= \lambda_{n,0} + \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

e o resultado em (4.19) segue, portanto, de (4.20), (4.21) e da unicidade do limite.

Agora, definindo-se funções escada $\psi_n(e^{i\theta})$, $n \geq 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$, por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & \text{se } 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \text{se } \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{se } \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

então, uma vez que $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 1$), têm-se, da definição da integral de Riemann-Stieltjes e de (4.16), que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta) = \frac{1}{z - e^{i \cdot 0}} \lambda_{n,0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - e^{i\theta_{n,j}}} \lambda_{n,j} = \frac{\lambda_{n,0}}{z - 1} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}} = \frac{A_n(z)}{B_n(z)},$$

ou seja,

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta), \quad n \geq 1. \tag{4.22}$$

Daí, aplicando o teorema de seleção de Helly (veja [15]), tem-se que existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$ converge para uma função limitada e não-decrescente em $[0, 2\pi]$. Denotando essa função por $\mu(e^{i\theta})$, como

$$\int_{\mathcal{C}} d\psi_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1 \tag{4.23}$$

(que segue da definição da integral de Riemann-Stieltjes e de (4.19)) e, como, considerando expansões em séries em torno da origem e do infinito, (4.4), (4.5) e (4.22),

vale

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \dots + \frac{\mu_{-n}}{z^{n+1}} &= \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-\zeta} d\psi_n(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-(\zeta/z)} \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \left[1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \dots \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} \int_{\mathcal{C}} \zeta^j d\psi_n(\zeta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \dots - \mu_n z^{n-1} &= \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-\zeta} d\psi_n(\zeta) = - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} \left[\frac{1}{1-(z/\zeta)} \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} \left[1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + \dots \right] d\psi_n(\zeta) \\ &= - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-(j+1)} d\psi_n(\zeta), \end{aligned}$$

então

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\psi_n(\zeta) = \mu_{-k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (4.24)$$

Agora, tomando o limite da subsequência $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$, a qual converge para $\mu(e^{i\theta})$, tem-se, por (4.23) e (4.24), que

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1 = \mathcal{M}[1] \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\mu(\zeta) = \mu_{-k} = \mathcal{M}[\zeta^k], \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.25)$$

onde \mathcal{M} é o funcional de momento definido em (4.10).

Finalmente, a partir de conhecidos resultados na literatura sobre problemas de momento no círculo unitário, pode-se concluir que μ é a única medida de probabilidade que satisfaz as relações (4.25). Além disso, da construção estabelecida acima e da definição da integral de Riemann-Stieltjes, tem-se também que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\psi_n(\zeta) &= \sum_{j=1}^n f(z_{n,j}) \lambda_{n,j} + f(1) \lambda_{n,0} \\ &= \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\tilde{\psi}_n(\zeta) + f(1) \lambda_{n,0}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $\tilde{\psi}_n(e^{i\theta})$, $n \geq 1$, são funções escada no intervalo $[0, 2\pi]$, do tipo

$$\tilde{\psi}_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \theta \leq \theta_{n,1} \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \text{se } \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \\ 1, & \text{se } \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Essa sequência de funções também (pelo teorema de seleção de Helly) possui uma subsequência $\{\tilde{n}_j\}$ tal que $\tilde{\psi}_{\tilde{n}_j}(e^{i\theta})$ converge para uma função limitada e não-decrescente em $[0, 2\pi]$, a qual será denotada por $\tilde{\mu}(e^{i\theta})$. Logo, tomando o limite na igualdade (4.26) quando $n \rightarrow \infty$, e levando em consideração que por (4.18), $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0$, obtém-se

$$\int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\tilde{\mu}(\zeta) + f(1)M_0,$$

de onde segue que a medida μ tem um ponto puro de massa M_0 em $z = 1$.

Observe também que a igualdade em (4.15), junto com as relações em (4.25), garantem que, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, vale

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\zeta^{-n}] &= \mathcal{M}[\zeta^{-n}(1 - \zeta)] = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] - \mathcal{M}[\zeta^{-n+1}] \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+1} d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}(1 - \zeta) d\mu(\zeta), \end{aligned}$$

e isto conclui a prova do teorema. ■

5 Outras propriedades de $R_n(z)$ e os OPUC associados

Nessa seção apresentam-se algumas propriedades adicionais satisfeitas pelos polinômios $R_n(z)$ que ajudarão a determinar a sequência de polinômios ortogonais associada à medida de probabilidade μ obtida na seção anterior. Inicialmente, observe que, do Teorema 4.1, tem-se

$$v_k = \mathcal{N}[\zeta^{-k}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k}(1 - \zeta) d\mu(\zeta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Daí, considerando $R_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} \zeta^j$, o Lema 3.4 garante que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k} R_n(\zeta) (1-\zeta) d\mu(\zeta) &= \sum_{j=0}^n r_{n,j} \left[\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k+j} (1-\zeta) d\mu(\zeta) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^n r_{n,j} \mathcal{N}[\zeta^{-n+k+j}] = \mathcal{N} \left[\sum_{j=0}^n r_{n,j} \zeta^{-n+k+j} \right] \\
 &= \mathcal{N}[\zeta^{-n+k} R_n(\zeta)] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$, com $n \geq 1$.

O seguinte lema relaciona os valores das integrais $\int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta)$ com a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lema 5.1 *Seja $\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta)$, com $n \geq 0$. Então*

$$\hat{\gamma}_0 = 1 \quad e \quad \hat{\gamma}_n = 2(1 - m_n) \hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{5.2}$$

onde $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração: Primeiro observe que, sendo $R_0(\zeta) = 1$, usando a definição de $\hat{\gamma}_n$ e o fato de μ ser uma medida de probabilidade (veja a primeira igualdade em (4.25)), tem-se

$$\hat{\gamma}_0 = \int_{\mathcal{C}} R_0(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1,$$

o que garante a primeira parte de (5.2). Por outro lado, sendo $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, usando a definição de $\hat{\gamma}_n$ e a relação da medida μ com sua respectiva sequência de momentos $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (dada em (4.25)), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_1 &= \int_{\mathcal{C}} R_1(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} [(1 + ic_1)\zeta + (1 - ic_1)] d\mu(\zeta) \\
 &= (1 + ic_1) \int_{\mathcal{C}} \zeta d\mu(\zeta) + (1 - ic_1) \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) \\
 &= (1 + ic_1) \mu_{-1} + (1 - ic_1).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Mas, da segunda igualdade em (4.8) e das relações entre as sequências $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ (dadas no enunciado do Lema 3.4), sabe-se, respectivamente, que

$$\mu_{-1} = 1 - \sum_{j=1}^1 v_{-j+1} = 1 - v_0 \quad e \quad v_0 = 2d_1/(1 + ic_1).$$

Logo, uma vez que $m_1 = d_1$ (pois $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros minimal para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$), a igualdade (5.3) pode ser reescrita como

$$\hat{\gamma}_1 = (1 + ic_1) \left(1 - \frac{2d_1}{1 + ic_1} \right) + (1 - ic_1) = 2(1 - d_1) = 2(1 - m_1), \quad (5.4)$$

e isto mostra a segunda parte de (5.2) para $n = 1$.

Para provar os demais casos de (5.2), observe inicialmente que, a partir de (5.1) com $k = n - 1$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) (1 - \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \hat{\gamma}_n, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Daí, fazendo $k = n - 2$ em (5.1) e usando a igualdade anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) (1 - \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - \hat{\gamma}_n, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-2} R_n(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Logo, continuando o processo acima para $k = n - 3, n - 4, \dots, 0$, pode-se concluir que

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-j} R_n(\zeta) d\mu(\zeta), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1. \quad (5.5)$$

Conseqüentemente, utilizando a fórmula de recorrência de três termos (1.5), é possível observar que, para $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_{n+1} &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_{n+1}(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} [(1 + ic_{n+1})\zeta + (1 - ic_{n+1})] R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\
 &\quad - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta), \\
 &= (1 + ic_{n+1}) \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) + (1 - ic_{n+1}) \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) \\
 &\quad - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\
 &= (1 + ic_{n+1})\hat{\gamma}_n + (1 - ic_{n+1})\hat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\hat{\gamma}_{n-1},
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{\gamma}_{n+1} = 2\hat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (5.6)$$

Agora, observe que a igualdade (5.6) é equivalente a

$$\begin{aligned}
 d_{1,n} &= d_{n+1} = \frac{2\hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_{n+1}}{4\hat{\gamma}_{n-1}} = \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} \frac{\left(2 - \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{\hat{\gamma}_n}\right)}{2} \\
 &= \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} \left(1 - \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{2\hat{\gamma}_n}\right) = (1 - g_n)g_{n+1}, \quad n \geq 1,
 \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde

$$g_n := 1 - \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (5.8)$$

Logo, usando (5.4), obtém-se

$$1 - g_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{2\hat{\gamma}_0} = \frac{2(1 - m_1)}{2.1} = 1 - m_1,$$

e, portanto, $g_1 = m_1$. Mas, do fato da sequência de parâmetros minimal de uma sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ser ainda uma sequência de parâmetros da sequência encadeada positiva $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, obtém-se, de (5.7), a seguinte igualdade

$$(1 - m_1)m_2 = d_{1,1} = (1 - g_1)g_2,$$

de onde segue que $g_2 = m_2$. Seguindo sucessivamente esse processo é possível concluir que $g_n = m_n$ para todo $n \geq 1$, o que garante por (5.8) que

$$1 - \frac{\hat{\gamma}_n}{2\hat{\gamma}_{n-1}} = m_n, \quad n \geq 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{\gamma}_n = 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

o que conclui a prova do lema. ■

Agora, como consequência imediata do Lema 5.1 (veja também (5.5)), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}} \overline{\zeta^k} [R_n(\zeta) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(\zeta)] d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - 2(1 - m_n) \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \hat{\gamma}_n - 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1} \\ &= \hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_n \\ &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Daí, usando o fato de $R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)$ ser um polinômio de grau exatamente n com o coeficiente do termo de maior grau, $r_{n,n}$, sendo $r_{n,n} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)$ (veja (3.10)), é possível estabelecer o seguinte teorema (o qual fornece a respectiva seqüência de polinômios ortogonais em relação à medida μ obtida na seção anterior):

Teorema 5.2 *Se a seqüência de polinômios $\{S_n\}$ é tal que*

$$S_0(z) = 1 \quad e \quad S_n(z) \prod_{k=1}^n (1 + ic_k) = R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z), \quad \text{com } n \geq 1,$$

então $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é a seqüência de OPUC mônicos com relação à medida $\mu(z)$.

Demonstração: De fato, uma vez que $S_0(z) = 1 \neq 0$ e

$$S_n(z) = \frac{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_n(z)} d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z) = \|S_n\|^2 \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Além disso, como $S_m(z)$ é um polinômio mônico de grau exatamente m , fazendo $S_m(z) := \sum_{j=0}^m b_{m,j} z^j$, $b_{m,j} \in \mathbb{C}$ ($b_{m,m} = 1$), $m \geq 0$, pode-se observar, por (5.9),

que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) &= \int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(z)} S_n(z) d\mu(z) = \int_{\mathcal{C}} \overline{\sum_{j=0}^m b_{m,j} z^j} S_n(z) d\mu(z) \\
 &= \sum_{j=0}^m \bar{b}_{m,j} \int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j S_n(z) d\mu(z) \\
 &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} \sum_{j=0}^m \bar{b}_{m,j} \int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j [R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)] d\mu(z) \\
 &= 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1,
 \end{aligned}$$

Consequentemente, usando (1.2), pode-se afirmar que $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de polinômios ortogonais mônicos, no círculo unitário, com relação à medida $\mu(z)$. ■

Observação 5.3 *Do teorema acima, e levando-se em consideração que se $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$, então, para $n \geq 1$, $r_{n,n} = \bar{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)$ (veja (3.10)), pode-se afirmar que os coeficientes de Verblunsky associados à medida μ , isto é, $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, com $n \geq 1$, são dados por*

$$\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}, \quad n \geq 1.$$

Com efeito, para $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n-1} &= -\overline{S_n(0)} = -\frac{\overline{[R_n(0) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(0)]}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = -\frac{\overline{[r_{n,0} - 2(1 - m_n)r_{n-1,0}]} }{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} \\
 &= \frac{-\bar{r}_{n,0} + 2(1 - m_n)\bar{r}_{n-1,0}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = \frac{-\prod_{k=1}^n (1 + ic_k) + 2(1 - m_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + ic_k)}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} \\
 &= \frac{-\prod_{k=1}^n (1 + ic_k) + 2(1 - m_n) \frac{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)}{(1 + ic_n)}}{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)} = \frac{-1 + \frac{2(1 - m_n)}{(1 + ic_n)}}{\frac{\prod_{k=1}^n (1 - ic_k)}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)}} \\
 &= \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}.
 \end{aligned}$$

6 Considerações finais

De forma conclusiva, destaca-se que o propósito deste trabalho não foi a proposição de resultados inéditos, mas sim a sistematização e o esclarecimento, sob uma perspectiva didática, de fundamentos teóricos essenciais sobre os polinômios ortogonais no círculo unitário e sobre as formulações do tipo Favard. A organização das demonstrações, acompanhadas de comentários explicativos e relações de recorrência, pretende contribuir para uma compreensão mais acessível e coerente dos conceitos que sustentam essa área da Matemática. Ao incorporar referências contemporâneas [4, 14, 19, 23], reafirma-se a relevância contínua desses resultados e o papel que exercem na consolidação de abordagens modernas dentro da teoria dos polinômios ortogonais e de suas aplicações.

Agradecimentos

Os autores expressam seus sinceros agradecimentos à equipe editorial e aos revisores anônimos da *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (ReviSeM)* pelas observações e sugestões criteriosas que contribuíram de maneira significativa para o aprimoramento científico e didático deste trabalho. Este artigo foi desenvolvido a partir de um recorte da dissertação de Mestrado em Matemática apresentada na Universidade Federal do Maranhão, e parte dos resultados aqui discutidos reflete o amadurecimento teórico alcançado durante o processo de revisão e de interlocução acadêmica. Agradece-se, ainda, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat/UFMA) pelo apoio institucional e pelas condições que possibilitaram a realização desta pesquisa.

Referências

- [1] Agarwal, R.P.; Milovanović, G.V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. *Appl. Math. Comput.*, v. 128, p. 151–166, 2002.
- [2] Anshelevich, M. Linearization coefficients for orthogonal polynomials using stochastic processes. *Ann. Probab.*, v. 33, n. 1, p. 114–136, 2005.
- [3] Bracciali, C. F.; LI, X.; Ranga, A. S. Real orthogonal polynomials in frequency analysis. *Math. Comp.*, v. 74, p. 341–362, 2005.
- [4] Bracciali, C.F.; Silva, J.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. Verblunsky coefficients related with periodic real sequences and associated measures on the unit circle. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 445, p. 719–745, 2017.

- [5] Breuer, J.; Ryckman, E.; Simon, B. Equality of the spectral and dynamical definitions of reflection. *Comm. Math. Phys.*, v. 295, p. 531–550, 2010.
- [6] Castillo, K.; Costa, M.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula. *J. Approx. Theory*, v. 184, p. 146–162, 2014.
- [7] Chihara, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [8] Costa, M.S.; Felix, H.M.; Sri Ranga, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *J. Approx. Theory*, v. 173, p. 14–32, 2013.
- [9] Cuyt, A. et al. *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. Springer, 2008.
- [10] Dimitrov, D.K.; Sri Ranga, A. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle. *Math. Nachr.* 286, p. 1778–1791, 2013.
- [11] Erdélyi, T.; Nevai, P.; Zhang, J.; Geronimo, J. A simple proof of “Favard’s theorem” on the unit circle. *Att. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, v. 39, p. 551–556, 1991.
- [12] Gautschi, W. Orthogonal polynomials - constructive theory and applications. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 12 e 13, p. 61–76, 1985.
- [13] Ismail, M.E.H.; Masson, D. R. Generalized orthogonality and continued fractions. *J. Approx. Theory* v. 83, p. 1–40, 1995.
- [14] Ismail, M.E.H.; Sri Ranga, A. R_{II} type recurrence, generalized eigenvalue problem and orthogonal polynomials on the unit circle. *Linear Algebra Appl.* v. 562, p. 63–90, 2019.
- [15] Jones, W.B.; Njåstad, O.; Thron, W.J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. Lond. Math. Soc.* v. 21, p. 113–152, 1989.
- [16] Ribeiro, F. B. *Polinômios ortogonais no círculo unitário obtidos a partir de uma relação de recorrência de três termos: um teorema do tipo Favard*. Dissertação de Mestrado em Matemática. São Luís: Universidade Federal do Maranhão, 2024.

- [17] Kheifets, A.; Golinskii, L.; Peherstorfer, F.; Yuditskii, P. Scattering theory for CMV matrices: uniqueness, Helson-Szegő and strong Szegő theorems. *Integr. Equ. Oper. Theory*, v. 69, p. 479–508, 2011.
- [18] Lorentzen, L.; Waadeland, H. *Continued Fractions with Applications*. Studies in Computational Mathematics, vol. 3. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [19] Marcato, G.; Sri Ranga, A.; Lun, Y. C. Parameters of a positive chain sequence associated with orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 150, p. 2553–2567, 2022.
- [20] Peherstorfer, F. Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle. *Math. Comp.*, v. 80, p. 1685-1701, 2011.
- [21] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [22] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*. In: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [23] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 3: Further Developments*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., v. 54, 2015. Providence, RI: American Mathematical Society, 2015.
- [24] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, 4. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
- [25] Tsujimoto, S.; Zhedanov, A. Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, v. 5, p. 30, 2009.
- [26] Wall, H.S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1948.

Recebido em 10 de Fevereiro de 2025

Revisado em 28 de Outubro de 2025

Aceito em 18 de Novembro de 2025