Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i2.22082

# ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV E APLICAÇÕES

## STABILITY IN THE LYAPUNOV SENSE AND APPLICATIONS

Renan Jackson Soares Isneri
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
renanisneri@mat.ufcg.edu.br

Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
aldo@servidor.uepb.edu.br.

Comunicado por A. Carvalho

**Resumo**

Este trabalho tem como objetivo explorar de forma didática o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov. Vamos abordar os diferentes tipos de estabilidade, incluindo instabilidade no sentido de Lyapunov, estável e assintoticamente estável e, em seguida, apresentamos o Critério de Lyapunov, com sua formulação e demonstração detalhada. Aplicaremos esse critério às equações que governam o movimento do pêndulo simples e do pêndulo com amortecimento, destacando a relação entre os conceitos de estabilidade e princípios físicos. Além disso, discutimos uma aplicação do Critério de Lyapunov para uma classe de equações semilineares de segunda ordem, com foco no comportamento assintótico no infinito de suas soluções.

**Palavras-chave:** Estabilidade; Critério de Lyapunov; Equação do Pêndulo.

**Abstract**

This work aims to explore the concept of stability in the sense of Lyapunov in a didactic manner. We will address different types of stability, including unstable, stable, and asymptotically stable, and then present Lyapunov's Criterion, along with its formulation and detailed proof. We will apply this criterion to the equations governing the motion of a simple pendulum and a damped pendulum, highlighting the relationship between stability concepts and physical principles. Additionally, we will discuss an application of Lyapunov's Criterion to a class of semilinear second-order equations, focusing on the asymptotic behavior at infinity of their solutions.

**Keywords:** Stability; Lyapunov Criterion; Pendulum Equation.



This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

# 1 Introdução

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, filho do astrônomo Mikhail Vasilievich Lyapunov e de Sofia Aleksandrovna Shilipova, iniciou seus estudos em casa, recebendo, posteriormente, orientação de seu tio para ingressar no Ginásio. Formou-se em 1876 e, em seguida, foi aceito na Universidade de São Petersburgo, onde desenvolveu uma amizade duradoura com o renomado matemático Andrey Markov. O trabalho inicial de Lyapunov concentrou-se na estabilidade das formas elipsoidais de um líquido em rotação, inspirado por uma questão proposta por Chebyshev. Em 1892, ele defendeu sua tese de doutorado, dedicada à estabilidade do movimento. Lyapunov lecionou na Universidade de Kharkov até 1902, onde teve um papel destacado na Sociedade Matemática de Kharkov. Suas contribuições notáveis incluíram a teoria das figuras de equilíbrio de líquidos em rotação e, no campo da probabilidade, a demonstração do teorema do limite central. Em 1917, mudou-se para Odessa, mas enfrentou uma tragédia pessoal com a morte de sua esposa, que o levou ao suicídio em 1918. Por seu trabalho de grande impacto, foi reconhecido por várias academias, sendo lembrado principalmente por suas contribuições influentes à estabilidade do movimento e à análise não linear. Para mais detalhes sobre sua vida e obras, recomendamos as leituras [3, 18].

Figura 1: Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

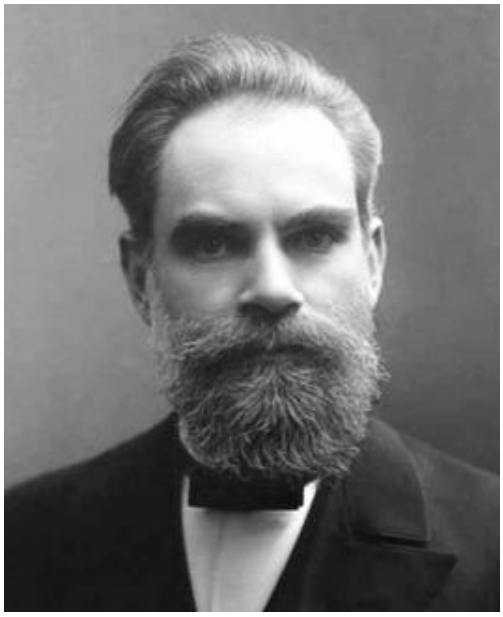


Imagem disponível em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov/

A estabilidade de Lyapunov é um conceito crucial na teoria de sistemas dinâmicos, desenvolvido pelo matemático russo Aleksandr Lyapunov no final do século XIX. Lyapunov propôs um método para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos, como equações diferenciais ordinárias. Seu trabalho pioneiro foi publicado em seu livro "The General Problem of the Stability of Motion" em 1892. Lyapunov introduziu o conceito de funções de Lyapunov, que são funções escalares que podem ser usadas para analisar o comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo. Ele demonstrou que a estabilidade de um sistema pode ser determinada examinando o comportamento das soluções em relação a uma função de Lyapunov. Ao longo dos anos, o conceito de estabilidade de Lyapunov foi amplamente estudado e aplicado em diversas áreas, incluindo engenharia de controle, física, biologia e economia. Os métodos de Lyapunov fornecem uma estrutura matemática para analisar a estabilidade e o comportamento de sistemas dinâmicos complexos. Além de Lyapunov, outros matemáticos e cientistas contribuíram significativamente para o desenvolvimento e aplicação da teoria de estabilidade de Lyapunov ao longo do tempo. Entre eles estão Henri Poincaré, que fez contribuições importantes para a teoria dos sistemas dinâmicos, e Andrey Kolmogorov, que trabalhou em problemas relacionados à teoria da probabilidade e sistemas dinâmicos. Hoje, a estabilidade de Lyapunov continua sendo uma ferramenta fundamental para entender e projetar sistemas dinâmicos em uma variedade de disciplinas. A aplicação prática dessa teoria pode ser encontrada em sistemas de controle de automóveis, aeronaves, robótica e muitas outras áreas da ciência e da engenharia.

Este trabalho tem como objetivo apresentar, de forma didática, o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov, formulando e provando o famoso Critério de Lyapunov, além de aplicá-lo às equações que regem o movimento do pêndulo, tanto no caso do pêndulo simples quanto no pêndulo com amortecimento. A análise será fundamentada no Critério de Lyapunov, que pode ser visto como uma generalização do Princípio da Conservação de Energia para sistemas conservativos, onde a energia total do sistema permanece constante ao longo do movimento. Além disso, os conceitos de estabilidade de Lyapunov fornecem ferramentas essenciais para a caracterização do comportamento assintótico das soluções de certas equações diferenciais, possibilitando a análise do comportamento das soluções no infinito. O estudo desses critérios é crucial para a compreensão da estabilidade de sistemas dinâmicos e suas aplicações práticas.

Também encontramos bastante aplicações da função de Lyapunov na biologia. Como por exemplo em um sistema diferencial particularmente representativo de ecologia que surge em experimentos de laboratório. Quando um quimiostato contém nutrientes e um microrganismo, (o exemplo de Daphnia) que usa os nutrientes para crescer. A modelagem é particularmente simples porque os nutrientes podem medir a massa de constituintes químicos que estão livres no quimiostato ou absorvidos pelo microrga-

nismo. Esse fenômeno pode ser descrito por equação de equilíbrio exato, ver [21] e para este sistema faz um estudo da função de Lyapunov associada. Outras aplicações importantes na biologia da função de Lyapunov aparecem nos seguintes estudos: Princípio de população estruturada e seleção: uma extensão, População estruturada: canibalismo, os quais podem ser encontradas em [20, 21].

Nosso principal resultado envolve a aplicação do Critério de Lyapunov para demonstrar que se existe uma solução $u = u(t)$ sob certas condições, para a seguinte equação semilinear de segunda ordem

$$u'' + au' + bg'(u) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

onde $a$ e $b$ são parâmetros positivos, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ que satisfaz a seguinte condição

$(g_1)$ Existem $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tais que $g(\alpha) = 0$ e

$$g(s) > 0 \quad \text{para todo } s \in (\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta).$$

Observamos que a notação $g'(u)$ representa a derivada da função $g$ em relação à sua variável $s$, avaliada no ponto $u$. Portanto, não se trata de uma derivada temporal. A solução $u = u(t)$ apresenta o seguinte comportamento assintótico no infinito

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} u'(t) = 0.$$

Vale destacar que a equação (1.1) é uma generalização da equação do pêndulo sob a influência de uma força de amortecimento. Essa generalização é obtida ao considerar

$$g(s) = \alpha - \alpha \cos\left(\frac{2\pi s}{\alpha}\right),$$

onde $g(s)$ representa um modelo periódico frequentemente associada ao potencial de Sine-Gordon. Outro exemplo relevante dentro desse contexto é

$$g(s) = (s^2 - \alpha^2)^2,$$

conhecido como o potencial de Ginzburg-Landau, com importantes aplicações na física. Para uma compreensão mais aprofundada sobre aplicações físicas desses potenciais, recomendamos a leitura dos artigos [1, 8].

Gostaríamos de destacar que o principal resultado apresentado neste trabalho, relacionado à equação (1.1) (veja, em particular, o Teorema 5.2), é inédito e representa

uma contribuição dos autores para o estudo das equações que modelam o movimento de um pêndulo com amortecimento, descritas por

$$\theta'' + a\theta' + b\text{sen}(\theta) = 0,$$

onde o termo $a\theta'$ representa a força de amortecimento, com $a > 0$. Este modelo inspirou nosso estudo devido à presença de soluções $\theta = \theta(t)$ que satisfazem as condições assintóticas

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \pi \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \theta'(t) = 0.$$

Para uma análise detalhada da equação do pêndulo com amortecimento, sugerimos a leitura de [19]. Já para um estudo mais abrangente da equação do pêndulo, incluindo o pêndulo com ponto de suspensão oscilante e a análise da estabilidade do sistema envolvido, recomendamos a referência [14]. No caso particular $a = 0$, são estabelecidas em [4] condições de existência dessas soluções utilizando métodos variacionais. Nossa abordagem, por outro lado, baseia-se no Critério de Lyapunov. Embora nosso estudo se concentre na equação (1.1) com $a > 0$, ele também foi inspirado por uma ampla gama de trabalhos que exploram equações do tipo (1.1), frequentemente referidas como equações de Allen-Cahn, no caso particular em que $a = 0$. Para uma compreensão mais detalhada, sugerimos a consulta aos artigos [10, 11, 12]. Por outro lado, para estudos que abordam especificamente o caso em que $a > 0$, recomendamos a leitura da referência [9].

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, introduzimos e discutimos os conceitos de instabilidade no sentido de Lyapunov, estável e assintoticamente estável. Na Seção 3, apresentamos o Critério de Lyapunov em detalhes, com sua formulação e demonstração. Em seguida, na Seção 4, aplicamos o conceito de estabilidade e o Critério de Lyapunov à equação do pêndulo, discutindo como esses conceitos se relacionam com princípios físicos. Finalmente, na Seção 5, exploramos uma aplicação do Critério de Lyapunov a uma classe de equações semilineares de segunda ordem, analisando suas implicações para a estabilidade de soluções.

# 2 Estabilidade

Nesta seção, estudaremos as noções de estabilidade para uma classe de sistemas autônomos. Daqui em diante, vamos considerar o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, equipado com a norma Euclidiana $\|\cdot\|$, a qual é derivada do produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}^N$, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Consideremos o seguinte sistema autônomo

$$y' = f(y), \tag{2.1}$$

em que $f : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função de classe $C^1$ definida no aberto $U$ e $y'$ denota a derivada do caminho $y$ definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}^N$ a qual é definida por

$$y'(s) = \lim_{t \to 0} \frac{y(s+t) - y(s)}{t}, \quad s \in I.$$

É comum referir-se a $f$ como um campo vetorial em $\mathbb{R}^N$. Daqui em diante, uma solução do sistema (2.1) passando por um ponto $x \in U$ é uma função diferenciável, denotada por $\varphi_x$, definida em um intervalo real aberto $I$ tal que

$$\varphi_x(t) \in U, \quad \forall\, t \in I,$$

e

$$\begin{cases} \varphi_x'(t) = f(\varphi_x(t)) \\ \varphi_x(0) = x, \end{cases}$$

a qual é solução do seguinte Problema do Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x, \end{cases}$$

Um ponto $x_0 \in U$ é dito *singular* para $f$ quando $f(x_0) = 0$. Neste caso, também dizemos que $x_0$ é um *ponto singular ou de equilíbrio* para o sistema autônomo (2.1). Neste contexto, a função constante $\varphi(t) = x_0$ é uma solução para (2.1).

A seguir, apresentaremos as noções de estabilidade para sistemas do tipo (2.1).

**Definição 2.1.** Seja $x_0 \in U$ um ponto singular para (2.1).

$(i)$ Dizemos que $x_0$ é *estável* se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda solução $y = \phi(t)$ do sistema (2.1) que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\phi(0) - x_0\| < \delta,$$

existe para todo $t \geq 0$ e satisfaz

$$\|\phi(t) - x_0\| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Para uma ilustração gráfica de $(i)$, consulte a Figura 2.

$(ii)$ Dizemos que $x_0$ é *assintoticamente estável*, se existe $\delta > 0$ tal que se uma solução $y = \phi(t)$ do sistema (2.1) for estável e satisfaz

$$\|\phi(0) - x_0\| < \delta,$$

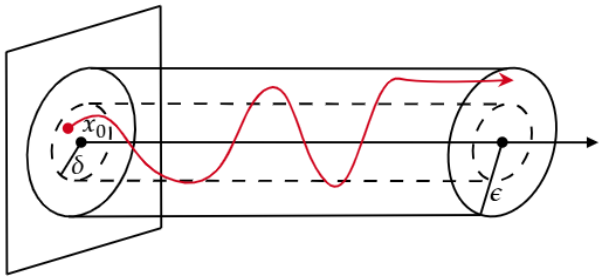
então

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = x_0.$$

Para uma ilustração gráfica de $(ii)$ veja Figura 3.

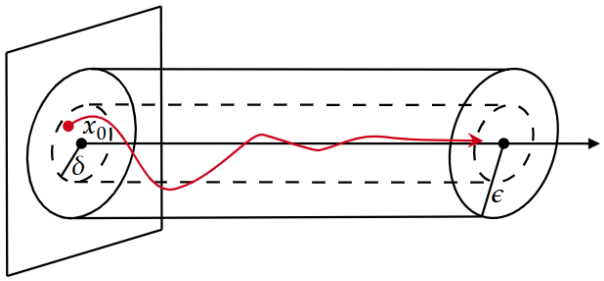
$(iii)$ O ponto $x_0$ é dito *instável* quando não é estável. Veja a Figura 4 para uma ilustração geométrica.

Figura 2: Interpretação geométrica de um ponto estável



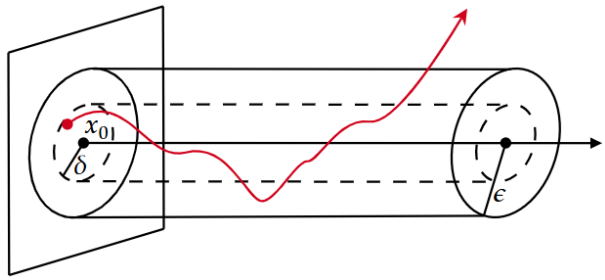

Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 3: Interpretação geométrica de um ponto assintoticamente estável




Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 4: Interpretação geométrica de um ponto instável




Fonte: Elaborada pelos autores

A seguir, veremos alguns exemplos para ilustrar, na prática, as noções de estabilidade.

**Exemplo 2.2.** Consideremos a seguinte equação diferencial unidimensional

$$y' = f(y), \tag{2.2}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(y) = ay$, sendo $a$ uma constante real. Primeiramente, observe que a solução da equação (2.2) que passa por $x \in \mathbb{R}$ assume a forma

$$\varphi_x(t) = e^{at}x.$$

Essa solução pode ser obtida diretamente aplicando o método do fator integrante para equações diferenciais lineares. Para uma explicação mais detalhada desse método, consulte, por exemplo, [5]. Note que 0 é um ponto singular para (2.2), uma vez que $f(0) = 0$. Veremos agora que a estabilidade de (2.2) fica bem determinada quando conhecido o valor de $a$.

$(i)$ Se $a < 0$, então 0 é assintoticamente estável.

Com efeito, como a solução de (2.2) passando por $x \in \mathbb{R}$ é da forma $\varphi_x(t) = e^{at}x$, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{M} > 0$, em que $M = \sup\limits_{t \geq 0} |e^{at}|$, para obter

$$|\varphi_x(0) - 0| = |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi_x(t) - 0| = |e^{at}x| \leq M|x| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, 0 é estável. Ademais, 0 é assintoticamente estável pois, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_x(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{at}x = 0,$$

uma vez que $a < 0$. Em resumo, quando $a$ é negativo, as soluções de (2.2) tendem a convergir para 0 conforme $t$ cresce, o que caracteriza a estabilidade assintótica do ponto 0.

**Observação 2.3.** *Conforme discutido anteriormente, a convergência das soluções da equação diferencial unidimensional $y' = ay$ para o ponto singular $t_0 = 0$ implica a estabilidade assintótica desse ponto, sempre que $a < 0$. No entanto, de maneira geral, isso não é verdade, pois existem exemplos de equações diferenciais ordinárias cujas soluções convergem para um mesmo ponto singular, mas esse ponto não é assintoticamente estável. Um exemplo clássico dessa situação é apresentado por Vinograd em [28].*

$(ii)$ Se $a = 0$, então 0 é estável mas não é assintoticamente estável.

De fato, para este caso específico, as soluções do sistema (2.2) passando pelo ponto $x \in \mathbb{R}$ são constantes, ou seja, $\varphi_x(t) = x$. Assim, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta = \epsilon$ de modo que

$$|\varphi_x(0) - 0| = |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi_x(t) - 0| = |x| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, 0 é estável. No entanto, 0 não é assintoticamente estável, pois para qualquer $\delta > 0$ e $x_0 \in (0, \delta)$ tem-se $|\varphi_{x_0}(t) - 0| = |x_0| > 0$ para todo $t \geq 0$. Isso significa que, independentemente de quão próximo inicialmente estamos de 0, as soluções permanecerão na mesma distância de 0 à medida que o tempo aumenta.

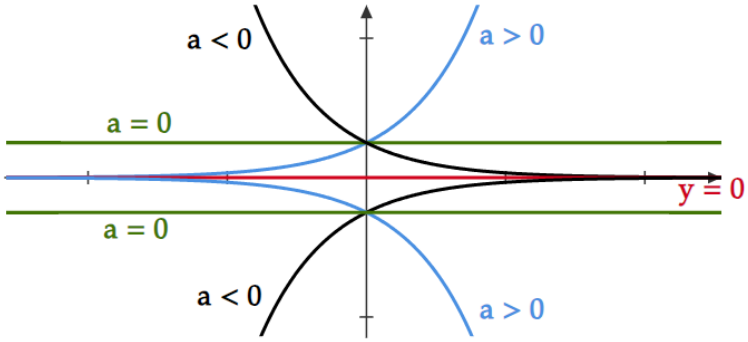
$(iii)$ Se $a > 0$, então 0 é instável.

Para demonstrar que 0 é um ponto instável quando $a > 0$, observe que para qualquer $\delta > 0$, se escolhermos $x$ pertencente ao intervalo $(-\delta, \delta)$ com $x \neq 0$, então $|\varphi_x(0) - 0| < \delta$. No entanto, podemos notar que

$$|\varphi_x(t) - 0| = |\varphi_x(t)| = |e^{at}x| = e^{at}|x| \geq 1, \quad \forall\ t \geq t_0$$

para algum $t_0 > 0$, dado que $|\varphi_x(t)| = e^{at}|x| \to +\infty$ conforme $t \to +\infty$. Isso implica que qualquer solução inicialmente próxima de 0 se afastará indefinidamente de 0 à medida que o tempo aumenta, tornando 0 um ponto instável do sistema quando $a > 0$.

Figura 5: Ilustração geométrica da estabilidade de (2.2)




Fonte: Elaborada pelos autores

O seguinte exemplo é um caso mais geral do exemplo anterior.

**Exemplo 2.4.** Consideremos o seguinte sistema linear autônomo

$$y' = f(y), \tag{2.3}$$

onde $y = y(t) = (u(t), v(t))$ e $f(u, v) = (au + bv, cu + dv)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Esse sistema pode ser reescrito de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

o que corresponde a um sistema linear de primeira ordem com coeficientes constantes. A análise desse tipo de sistema é essencial na teoria das equações diferenciais. A solução geral envolve determinar os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes, o que permite a construção das soluções gerais do sistema. Para um estudo aprofundado sobre métodos de solução recomendamos a leitura da referência [5]. Observe que $(0, 0)$ é um ponto singular para o sistema (2.3), uma vez que $f(0, 0) = (0, 0)$. Agora, sejam $r_1$ e $r_2$ raízes da equação característica

$$r^2 - (a + d)r + (ad - cb) = 0.$$

Neste caso, a estabilidade do ponto singular $(0, 0)$ é determinada quando são conhecidas as raízes da equação característica. A seguinte caracterização ocorre:

$(i)$ Se $\mathrm{Re}(r_1) < 0$ e $\mathrm{Re}(r_2) < 0$, então $(0,0)$ é um ponto assintoticamente estável.

$(ii)$ Se $r_1$ e $r_2$ são imaginários puros, então $(0,0)$ é um ponto estável, mas não é assintoticamente estável.

$(iii)$ Se $\mathrm{Re}(r_1) > 0$ ou $\mathrm{Re}(r_2) > 0$, então $(0,0)$ é um ponto instável.

Pelo estudo clássico de equações diferenciais ordinárias lineares, sabemos que as soluções são classificadas de acordo com os valores das raízes $r_1$ e $r_2$. Por exemplo, quando $r_1$ e $r_2$ são imaginários puros, as soluções do sistema (2.2) são ciclos fechados do tipo centro e, por isso, $(0,0)$ deve ser um ponto estável, mas não é assintoticamente estável. Para um estudo detalhado da estabilidade do sistema (2.3) recomendamos a leitura de [5]. No caso mais geral, do estudo da estabilidade de sistemas lineares em $\mathbb{R}^N$ veja [15, 24, 25].

**Observação 2.5.** *Gostaríamos de destacar que o objetivo do Exemplo 2.4 é ilustrar que o Exemplo 2.2 pode ser estendido a um caso mais geral. No entanto, o estudo detalhado da estabilidade do sistema linear apresentado naquele exemplo, utilizando a Definição 2.1, apresenta desafios e cálculos extensivos. Por exemplo, as soluções do sistema são de natureza exponencial, ou seja, têm a forma $e^{At}$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

*Estudar o comportamento dessas soluções na origem requer um estudo aprofundado sobre os autovalores e autovetores da matriz $A$, o que por si só traz dificuldades, principalmente quando a matriz $A$ não é diagonalizável. Dado o caráter introdutório deste trabalho, o desenvolvimento desses cálculos seria excessivamente longo e desviaria do objetivo principal. Para maiores detalhes, o leitor interessado pode consultar [13].*

# 3 Critério de Lyapunov

Nesta seção, apresentaremos o Critério de Lyapunov, também conhecido como método direto, um importante instrumento na análise de estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Esse critério permite inferir a estabilidade de pontos singulares por meio da construção de uma função auxiliar apropriada, chamada função de Lyapunov. Antes de detalharmos o método, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 3.1 (Função de Lyapunov).** *Seja $x_0 \in U$ um ponto singular para o sistema (2.1). Uma função $V : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ no aberto $A \subset U$ contendo $x_0$ é dita função de Lyapunov para $x_0$, se satisfaz às seguintes condições:*

*(i)* $V(x_0) = 0$ *e* $V(x) > 0$ *para todo* $x \in A \setminus \{x_0\}$*;*

*(ii)* $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ *para todo* $x \in A$*.*

*A função de Lyapunov* $V$ *é dita estrita se*

*(iii)* $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ *para todo* $x \in A \setminus \{x_0\}$*.*

**Observação 3.2.** *Para cada* $x \in A$*, sabemos que existe um ângulo* $\theta$ *entre os vetores* $\nabla V(x)$ *e* $f(x)$ *tal que*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \|\nabla V(x)\| \|f(x)\| \cos(\theta).$$

*Pela condição* $(ii)$ *da definição de uma função de Lyapunov,* $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$*. Consequentemente,* $\cos(\theta) \leq 0$ *e, assim, o ângulo* $\theta$ *deve estar entre* $90°$ *e* $180°$*. Isso significa que os vetores* $\nabla V(x)$ *e* $f(x)$ *formam um ângulo não agudo. Isso fornece uma ilustração geométrica da condição* $(ii)$*.*

A Definição 3.1 é fundamental para analisar propriedades como estabilidade e convergência em sistemas do tipo (2.1).

**Exemplo 3.3.** Consideremos o seguinte sistema linear autônomo

$$y' = f(y), \tag{3.1}$$

em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dado por

$$f(u, v) = (-u - v, 3u - 2v).$$

Neste caso, $(0, 0)$ é um ponto singular para (3.1). Vamos mostrar que a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(u, v) = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$$

é uma função de Lyapunov estrita para $(0, 0)$. De fato, notemos inicialmente que $V(0, 0) = 0$ e que $V(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$. Além disso,

$$\langle \nabla V(u, v), f(u, v) \rangle = \langle (u, v), (-u - v, 3u - 2v) \rangle = -(u - v)^2 - v^2 < 0, \quad \forall\, (u, v) \neq (0, 0).$$

Portanto, $V$ é uma função de Lyapunov estrita para $(0, 0)$.

**Observação 3.4.** *Observe que, se $V$ é uma função de Lyapunov para um ponto $x_0$, então a função $V_\alpha(x) = \alpha V(x)$, com $\alpha > 0$, também é uma função de Lyapunov para $x_0$. Isso mostra que essas funções não são únicas. No entanto, as propriedades geométricas associadas permanecem inalteradas. Em particular, se $V$ é uma função de Lyapunov estrita, $V_\alpha$ também será, ou seja, ambas fornecem as mesmas informações sobre o comportamento do sistema. Na Seção 4, veremos a existência de um sistema que admite uma função de Lyapunov $V$ que não é estrita, mas também uma outra função de Lyapunov $\widetilde{V}$, que é estrita. Isso evidencia que uma função de Lyapunov pode fornecer mais informações sobre a estabilidade do sistema do que outra.*

O seguinte lema é crucial para provar o Critério de Lyapunov.

**Lema 3.5.** *Seja $V : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ no aberto $A \subset U$, onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é o domínio do campo vetorial $f$ associado ao sistema autônomo (2.1). Se*

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle \leq 0 \quad \textit{para todo } z \in A$$

*e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo tal que $\varphi_x(t) \in A$, para algum $x \in U$ e para todo $t \in I$, em que $\varphi_x(t)$ é uma solução de (2.1) passando por $x$, então a função $t \mapsto V(\varphi_x(t))$ é não-crescente em $I$.*

*Demonstração.* Para provar o lema vamos definir a seguinte função

$$h(t) = V(\varphi_x(t)) \quad \text{para} \quad t \in I.$$

Por definição, $h$ é uma função de classe $C^1$, pois $V$ e $\varphi_x(t)$ são funções de classe $C^1$. Assim, pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(V \circ \varphi_x)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi_x(t)) \cdot \varphi'_{x,i}(t), \quad \forall\, t \in I, \tag{3.2}$$

em que $\varphi_x(t) = (\varphi_{x,1}(t), \ldots, \varphi_{x,n}(t))$. Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi_x(t)) \cdot \varphi'_{x,i}(t) = \langle \nabla V(\varphi_x(t)), \varphi'_x(t) \rangle, \quad \forall\, t \in I, \tag{3.3}$$

e segue por (3.2) e (3.3) que

$$h'(t) = \langle \nabla V(\varphi_x(t)), \varphi'_x(t) \rangle, \quad \forall\, t \in I.$$

Agora, desde que $\varphi_x$ é solução do sistema (2.1),

$$\varphi'_x(t) = f(\varphi_x(t)), \quad \forall\, t \in I.$$

Consequentemente,

$$h'(t) = \langle \nabla V(\varphi_x(t)), f(\varphi_x(t)) \rangle, \quad \forall\, t \in I. \tag{3.4}$$

Portanto, por hipótese, $h'(t) \leq 0$ para todo $t \in I$, e consequentemente, $h$ é uma função não-crescente em $I$, o que prova o nosso resultado. □

A função $h(t)$ definida na prova do lema anterior, revela que podemos calcular a taxa de variação da função $V$ ao longo da solução do sistema (2.1) passando por $x$ sem precisar conhecer explicitamente a própria solução $\varphi_x$. Isso é fundamental, porque fornece uma maneira de analisar o comportamento global do sistema sem a necessidade de resolver explicitamente suas trajetórias. Essencialmente, $h'(t)$ nos diz como $V$ está mudando em $x$ devido às influências do campo vetorial $f(x)$. Isso nos permite determinar, se a função de Lyapunov $V : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ no aberto $A \subset U$ contendo $x_0$ está crescendo, diminuindo ou permanecendo constante ao longo das soluções de (2.1), contidas em $A$, à medida que o tempo aumenta, o que por sua vez, veremos que isso dá informações cruciais sobre a estabilidade do sistema.

**Teorema 3.6 (Critério de Lyapunov).** *Seja $x_0$ um ponto singular para o sistema (2.1). Se existe uma função de Lyapunov $V$ para $x_0$, então $x_0$ é um ponto estável. Além disso, se $V$ for estrita, então $x_0$ assintoticamente estável.*

*Demonstração.* Considere $x_0$ um ponto singular para o sistema (2.1). Suponha que existe uma função $V : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, com $A$ contendo $x_0$, tal que $V$ é uma função de Lyapunov para $x_0$. Como $A$ é um conjunto aberto, podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que o fecho da bola aberta $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ esteja contido em $A$, isto é,

$$\overline{B_\epsilon(x_0)} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| \leq \epsilon\right\} \subset A.$$

Por outro lado, como $V$ é uma função de Lyapunov, o conjunto

$$M = \{V(x) : x \in A \quad \text{e} \quad \|x - x_0\| = \epsilon\}$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Portanto, podemos considerar o seguinte número real

$$m = \inf M \geq 0.$$

Afirmamos que $m > 0$. Com efeito, como estamos restringindo a função contínua $V$ a um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$, existe um ponto $y \in A$ tal que $\|y - x_0\| = \epsilon$ e $V(y) = m$. Pela condição $(i)$ da Definição 3.1, concluímos que $m > 0$. Em seguida, definimos o seguinte conjunto

$$W = \{x \in B_\epsilon(x_0) \mid V(x) < m\}.$$

Notemos que, pela continuidade da função $V$, $W$ é aberto pois podemos escrever

$$W = V^{-1}\left((-\infty, m)\right) \cap B_\epsilon(x_0).$$

Além disso, $x_0 \in W$ pois $V(x_0) = 0$ e, assim, existe $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que $B_\delta(x_0) \subset W$.

**Afirmação 1:** Se $\varphi_x(t)$ é solução de (2.1) com $x = \varphi_x(0) \in B_\delta(x_0)$, então $\varphi_x(t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$, isto é,

$$\|\varphi_x(t) - x_0\| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Note inicialmente que a função $\varphi_x(t)$ está globalmente definida. De fato, suponha que $(0, \omega_+)$ seja o intervalo máximo de definição, com $\omega_+ < +\infty$. Pela Proposição 1.4.3 de [23], existe uma sequência $(t_n) \subset (0, \omega_+)$ tal que $t_n \to \omega_+$ e $\|\varphi_x(t_n)\| \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Assim, deve existir um tempo $t_{n_0} > 0$ tal que $\varphi_x(t_{n_0}) \notin B_\epsilon(x_0)$. Daí, como

$$x = \varphi_x(0) \in B_\epsilon(x_0),$$

em algum instante $t_* > 0$, a solução $\varphi_x(t)$ deve passar pela primeira vez na esfera de centro $x_0$ e raio $\epsilon$, isto é,

$$\|\varphi_x(t_*) - x_0\| = \epsilon.$$

Com efeito, definindo a função

$$f(t) = \|\varphi_x(t) - x_0\| \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

obtemos que $f$ é derivável com $f(0) < \epsilon$ e $f(t_{n_0}) > \epsilon$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, podemos encontrar $t_* \in (0, t_{n_0})$ tal que $f(t_*) = \epsilon$ e $f(t) < \epsilon$ para todo $t \in (0, t_*)$, como queríamos mostrar. Consequentemente, $\varphi_x(t_*) \notin W$ e, assim,

$$V(\varphi_x(t_*)) \geq m > V(x) = V(\varphi_x(0)). \tag{3.5}$$

Por outro lado, notemos que $\varphi_x(t) \in B_\epsilon(x_0) \subset A$ para todo $t \in [0, t_*]$. Assim, pelo Lema 3.5, deduzimos que

$$V(\varphi_x(t_*)) \leq V(\varphi_x(0)),$$

o que contradiz (3.5). Além disso, $\varphi_x(t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$. De fato, se isso não ocorrer, então deve existir um instante $t_1 > 0$ tal que $\varphi_x(t_1) \notin B_\epsilon(x_0)$, o que produz a existência de $t_* > 0$ para o qual $\|\varphi_x(t_*) - x_0\| = \epsilon$. Esse fato permite aplicar um argumento análogo ao já apresentado para demonstrar que $\varphi_x(t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$. Com tudo, a Afirmação 1 está comprovada.

Pela Afirmação 1, $x_0$ é um ponto estável. Vamos agora assumir que $V$ é estrita a fim de provar que $x_0$ é assintoticamente estável.

**Afirmação 2:** $\lim_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = x_0$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

Conforme estabelecido na Afirmação 1, para cada $x \in B_\delta(x_0)$, podemos definir a função

$$h(t) = V(\varphi_x(t)) \quad \text{para} \quad t \in [0, +\infty).$$

Notemos que, $h$ é uma função de classe $C^1$, limitada inferiormente e monótona decrescente, pois

$$h'(t) = \langle \nabla V(\varphi_x(t)), f(\varphi_x(t)) \rangle < 0, \quad \forall\, t > 0.$$

Por conseguinte, existe $a \geq 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi_x(t)) = a \quad \text{e} \quad V(\varphi_x(t)) \geq a, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Vamos mostrar que $a = 0$. Com efeito, supondo por contradição que $a > 0$, segue da continuidade de $V$ e do fato de que $V(x_0) = 0$, que podemos escolher $r \in (0, \epsilon)$ de forma que

$$V(y) < a, \quad \forall\, y \in B_r(x_0).$$

Isso implica que $\varphi_x(t) \notin B_r(x_0)$ para todo $t \geq 0$. Agora, desde que a função $z \to \langle \nabla V(z), f(z) \rangle$ é contínua em $A$, $V$ é uma função de Lyapunov estrita e $S_\epsilon(x_0) = \overline{B}_\epsilon(x_0) \setminus B_r(x_0)$ é compacto em $\mathbb{R}^N$ (ver Lima [17]), segue que existe $b > 0$ tal que

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle < -b, \quad \forall\, z \in \overline{B}_\epsilon(x_0) \setminus B_r(x_0).$$

Daí, como $\varphi_x(t) \in \overline{B}_\epsilon(x_0) \setminus B_r(x_0)$ para todo $t \geq 0$, segue da definição de $h$ que

$$h'(t) \leq -b, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$V(\varphi_x(t)) - V(\varphi_x(0)) \leq -bt, \quad \forall\, t \geq 0,$$

de onde segue que

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi_x(t)) = -\infty,$$

o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $a = 0$. Para concluir a prova, consideremos $(t_n) \subset [0, +\infty)$ uma sequência tal que $t_n \to +\infty$. Como $\varphi_x(t_n) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existem $(t_{n_k}) \subset (t_n)$ e $y \in \mathbb{R}^N$, tais que, $\lim_{k\to\infty} \varphi_x(t_{n_k}) = y$ (ver Lima [16]). Por continuidade,

$$\lim_{k\to\infty} V(\varphi_x(t_{n_k})) = V(y).$$

Por unicidade de limite, concluímos que $V(y) = 0$, implicando que $y = x_0$. Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_x(t_{n_k}) = x_0. \tag{3.6}$$

Desde que toda subsequência de $(t_n)$ possui uma subsequência que satisfaz (3.6), podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_x(t_n) = x_0.$$

Como $(t_n)$ foi escolhida arbitrariamente, resulta que,

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = x_0,$$

ou seja, $x_0$ é assintoticamente estável, e portanto, a prova está completa. □

Vamos agora discutir a estabilidade dos sistemas lineares considerados na seção anterior usando o Critério de Lyapunov.

**Exemplo 3.7.** Consideremos a seguinte equação diferencial

$$y' = f(y), \tag{3.7}$$

onde $f(s) = as$, com $a < 0$. Agora, seja $V(s) = s^2$ para $s \in \mathbb{R}$. Observe que $V(0) = 0$ e que $V(s) > 0$ para todo $s \neq 0$. Além disso,

$$V'(s) \cdot f(s) = 2as^2 < 0 \quad \text{para todo} \quad s \neq 0.$$

Portanto, $V$ é uma função de Lyapunov estrita para $s_0 = 0$. Pelo Critério de Lyapunov, concluímos que a equação (3.7), com $a < 0$, possui o ponto $s_0 = 0$ como assintoticamente estável, em concordância com o Exemplo 2.2.

**Exemplo 3.8.** Com base no Exemplo 3.3, que considera o sistema linear (3.1), a função

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

é uma função de Lyapunov estrita associada ao ponto singular $(0, 0)$. Dessa forma, pelo Critério de Lyapunov, conclui-se que o ponto $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

**Exemplo 3.9.** Consideremos a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Vamos determinar as condições para que $V$ seja uma função de Lyapunov para o seguinte sistema linear autônomo

$$y' = f(y), \tag{3.8}$$

onde $y = (u, v)$ e

$$f(u, v) = (au + bv, cu + dv),$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ representando os coeficientes do sistema. É claro que $(0, 0)$ é um ponto singular para o sistema linear e que $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Além disso,

$$\langle \nabla V(u, v), f(u, v) \rangle = u(au + bv) + v(cu + dv) = au^2 + (b + c)uv + dv^2. \tag{3.9}$$

Para que $V(u, v)$ seja uma função de Lyapunov válida, é necessário que

$$\langle \nabla V(u, v), f(u, v) \rangle \leq 0 \quad \text{para todo } (u, v) \neq (0, 0).$$

Isso implica que a expressão quadrática acima deve ser negativa definida em $(u, v)$, exceto no ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Para analisar se essa forma quadrática é negativa definida, utilizamos uma representação em termos de uma forma quadrática genérica

$$Q(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2,$$

onde, no nosso caso, identificamos os coeficientes como $A = a$, $B = \frac{b+c}{2}$ e $C = d$. Conforme estabelecido no Corolário 7.1.5 de [22], para que a forma quadrática seja negativa definida, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(1) O coeficiente $A$ deve ser negativo, ou seja, $a < 0$.

(2) O determinante da matriz associada à forma quadrática

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$$

deve ser positivo, isto é,

$$\det(M) = ad - \left(\frac{b + c}{2}\right)^2 > 0.$$

(3) O coeficiente $C$ também deve ser negativo, ou seja, $d < 0$.

Essas condições asseguram que a forma quadrática (3.9) será negativa definida, exceto no ponto $(u, v) = (0, 0)$, onde ela é zero. Consequentemente, $V$ atua como um função de Lyapunov estrita para o sistema, garantindo, devido ao Critério de Lyapunov, que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável. Em outros casos, dependendo das condições específicas de $a, b, c$, e $d$, pode ocorrer da origem $(0, 0)$ ser estável. Para ilustrar essa dependência veja o Exemplo 3.3 em que o ponto $(0, 0)$ é assintoticamente estável. Por outro lado, para um caso em que a origem é um ponto estável basta considerar $a = d = 0$ e $b = -c$. Esses critérios para $V(u, v)$ permitem classificar a estabilidade do sistema. Para uma análise mais aprofundada sobre formas quadráticas e suas propriedades, recomendamos a consulta das referências [6, 22, 26].

Antes de concluirmos esta seção, gostaríamos de destacar que existem diversos resultados que aprimoram o Critério de Lyapunov em vários aspectos. Por exemplo, é possível garantir a estabilidade assintótica de um ponto singular de um sistema dinâmico sem a necessidade de que a função de Lyapunov seja estrita, conforme indicado no seguinte teorema:

**Teorema 3.10.** *Seja $x_0$ um ponto singular para o sistema (2.1). Suponha que exista uma função de Lyapunov $V : A \to [0, +\infty)$ para $x_0$, em que $A$ é um aberto do $\mathbb{R}^N$ contendo $x_0$. Se $\varphi_x(t) \equiv x_0$ é a única trajetória contida em*

$$\{x \in A : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\},$$

*então $x_0$ é assintoticamente estável.*

A prova deste teorema, bem como outras discussões relevantes sobre o tema, podem ser encontradas no Capítulo 8 de [27].

# 4 Equação do Pêndulo

Nesta seção, vamos aplicar o Critério de Lyapunov para estudar a estabilidade do sistema descrito pela equação diferencial do pêndulo a fim de determinar condições sob as quais o movimento do pêndulo será estável ou assintoticamente estável, ou seja, se ele tenderá a oscilar em torno da posição de equilíbrio, com suas oscilações permanecendo constantes ou diminuindo à medida que o tempo avança. O Critério de Lyapunov, pode ser compreendido como uma generalização do Princípio da Conservação da Energia para sistemas conservativos, expresso da seguinte maneira:

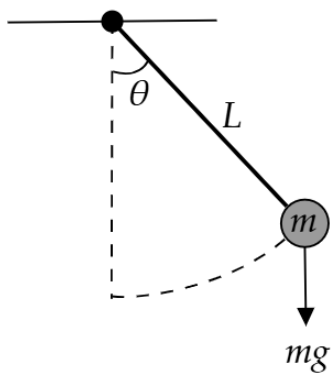
*Em um sistema mecânico composto por corpos que interagem apenas por meio de forças conservativas, a energia total permanece constante ao longo de todo o movimento.*

Para ilustrar essa ideia, tomemos como exemplo a equação diferencial do pêndulo simples (sem amortecimento)

$$\theta'' + \frac{g}{L} sen\,(\theta) = 0, \tag{4.1}$$

em que $L$ representa o comprimento de uma barra rígida e sem peso, $g$ é a aceleração da gravidade, e $\theta$ denota o ângulo que descreve a posição do pêndulo em relação à barra e à direção vertical orientada para baixo, com o sentido trigonométrico considerado positivo.

Figura 6: Pêndulo Simples




Fonte: Elaborada pelos autores

O movimento do pêndulo é governado por duas forças: a força gravitacional, $F_g = mg$, e a força de tensão na corda, que não contribui diretamente para o movimento angular, pois é perpendicular ao deslocamento. Além disso, a única força que contribui para força gravitacional é a componente tangencial dada por

$$F_t = -mg\text{sen}(\theta). \tag{4.2}$$

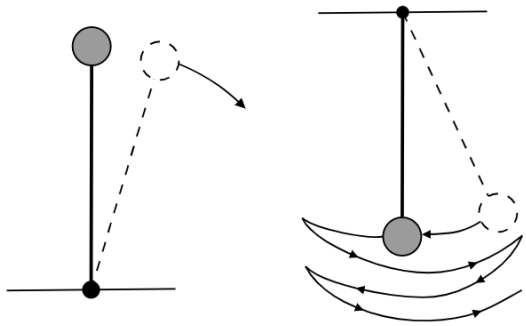
Esta é a única força que gera aceleração tangencial $a_t$ no movimento do pêndulo. Neste caso, pela Segunda Lei de Newton,

$$F_t = ma_t, \tag{4.3}$$

em que $a_t$ pode ser escrita em termos da aceleração angular $a_t = L\theta''$. Substituindo (4.3) em (4.2), deduzimos a equação do pêndulo simples dada em (4.1). Para um estudo mais aprofundado sobre a equação do pêndulo simples, recomendamos a leitura de [7, 19].

Os conceitos de estabilidade e instabilidade podem ser claramente visualizados em termos de um pêndulo oscilatório. Por exemplo, considere que, se a massa for levemente deslocada da posição de equilíbrio acima do suporte, ela cairá rapidamente sob a influência da gravidade. Esse comportamento ilustra a instabilidade. Agora, no caso do pêndulo simples, se a massa for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio abaixo do suporte, ela vai oscilar para a direita e para a esquerda indefinidamente com amplitude constante em torno do ponto de equilíbrio, o que ilustra a noção de estabilidade. Essa oscilação indefinida ocorre devido à ausência de forças de amortecimento no movimento do pêndulo.

Figura 7: Oscilação do Pêndulo Simples



Fonte: Elaborada pelos autores

Vamos mostrar que essa estabilidade do Pêndulo Simples ocorre no sentido de Lyapunov. Para isso, vamos transformar a equação (4.1) em um sistema de duas equações de primeira ordem. Definimos $x = \theta$ e $y = \theta'$, obtemos

$$x' = \theta' = y \quad \text{e} \quad y' = \theta'' = -\frac{g}{L} sen\,(x),$$

pois $\theta = \theta(t)$ satisfaz a equação (4.1). Portanto, isso resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{g}{L} sen\,(x) \end{cases} \tag{4.4}$$

Note que o sistema (4.4) pode ser escrito na forma de (2.1) com

$$f(x, y) = \left(y, -\frac{g}{L} sen\,(x)\right) \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Além disso, os pontos singulares do sistema (4.4) são $(x, y) = (k\pi, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Esses pontos correspondem a duas posições físicas de equilíbrio: uma com a massa do objeto diretamente abaixo do suporte ($\theta = 0$) e a outra com a massa diretamente acima do suporte ($\theta = \pi$). Fisicamente, esperamos que os pontos $(2k\pi, 0)$ sejam estáveis e que os pontos $(2k\pi + \pi, 0)$ sejam instáveis. A energia total envolvida no movimento de um pêndulo, chamemos de $V$, é uma combinação da energia cinética e da energia potencial, representada como

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x)).$$

Agora, ao examinarmos como essa energia varia ao longo da trajetória do pêndulo $(x(t), y(t))$ com o tempo $t$, podemos usar a Regra da Cadeia para calcular a taxa de variação de $V(t) = V(x(t), y(t))$. Consequentemente,

$$\frac{dV}{dt} = mL^2yy' + mgLsen\,(x)x'. \tag{4.5}$$

Por (4.4) e (4.5), obtemos

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

ou seja, $V$ é constante ao longo de qualquer trajetória do sistema (4.4), o que é consistente com o Princípio da Conservação da Energia. Por outro lado, sobre o aberto

$$A_{k,\delta} = \mathbb{R} \times (2k\pi - \delta, 2k\pi + \delta),$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e $\delta \in (0, 2k\pi + 2\pi)$, $V$ é uma função de Lyapunov para $(2k\pi, 0)$, já que $V(2k\pi, 0) = 0$, $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in A_{k,\delta} \setminus \{(2k\pi, 0)\}$ e

$$\langle \nabla V(x, y), f(x, y)\rangle = 0, \quad \forall\ (x, y) \in A_{k,\delta}.$$

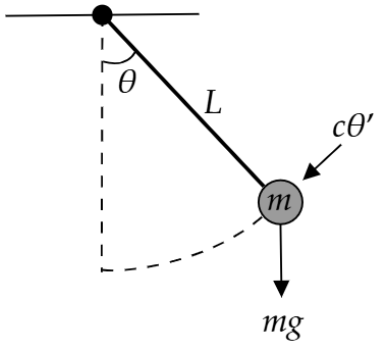
Portanto, pelo Critério de Lyapunov, $(2k\pi, 0)$ é um ponto estável para o sistema (4.4).

Vamos agora adentrar à análise do movimento do pêndulo considerando a presença de uma força de amortecimento. A equação diferencial que descreve esse fenômeno é expressada por

$$\theta'' + c\theta' + \frac{g}{L}sen\,(\theta) = 0,$$

em que $c\theta'$ representa a força de amortecimento com $c > 0$.

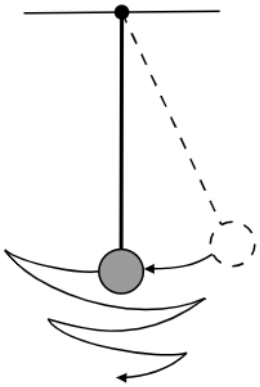
Figura 8: Pêndulo Amortecido




Fonte: Elaborada pelos autores

Vejamos agora que o conceito de estabilidade assintótica pode ser visualizado em termos de um pêndulo com amortecimento. Por exemplo, suponha que a massa seja ligeiramente perturbada de sua posição de equilíbrio abaixo do suporte. Inicialmente, ela iniciará uma oscilação para a direita e para a esquerda, e devido a influência da força de amortecimento, a amplitude diminuirá gradualmente a cada ciclo até alcançar finalmente a posição de equilíbrio. Esse comportamento exemplifica a estabilidade assintótica.

Figura 9: Oscilação do Pêndulo com Amortecimento



Fonte: Elaborada pelos autores

Vamos empregar o Critério de Lyapunov para demonstrar que a estabilidade assintótica do movimento do pêndulo com amortecimento ocorre no sentido de Lyapunov.

Para este fim, definindo $x = \theta$ e $y = \theta'$, a equação diferencial do pêndulo amortecido é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -cy - \dfrac{g}{L} sen\,(x). \end{cases} \tag{4.6}$$

O sistema (4.6) pode ser escrito na forma do sistema (2.1) pondo

$$\tilde{f}(x,y) = \left(y, -cy - \frac{g}{L} sen\,(x)\right) \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Neste caso, o ponto $(0,0)$ é um ponto singular para (4.6). Como discutido anteriormente, $(0,0)$ é um possível candidato a ser um ponto assintoticamente estável para o sistema (4.6). Para mostrar este fato usando o Critério de Lyapunov devemos encontrar uma função de Lyapunov para $(0,0)$. Dado que a equação do pêndulo amortecido foi derivada de um problema que conserva o Princípio da Conservação de Energia, podemos considerar a energia total do sistema como uma candidata natural a função de Lyapunov para $(0,0)$. Assim, vamos primeiramente considerar a função energia $V_e : \tilde{A} \to \mathbb{R}$, em que $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$ e $\delta \in (0, 2\pi)$, definida por

$$V_e(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos(x)).$$

A função $V_e$ é de Lyapunov para $(0,0)$ pois $V_e(0,0) = 0$, $V_e(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \tilde{A} \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\langle \nabla V_e(x,y), \tilde{f}(x,y) \rangle = -cy^2 \leq 0.$$

Pelo Critério de Lyapunov, podemos afirmar que $(0,0)$ é um ponto de estabilidade para o sistema (4.6). Contudo, não podemos garantir a estabilidade assintótica usando o mesmo critério, uma vez que a função $V$ não é estrita. Como discutido anteriormente, a expectativa é que $(0,0)$ seja assintoticamente estável, e a função de energia $V_e$ não nos ajuda a resolver esse problema. Portanto, é necessário considerar outra função. Vamos agora considerar $\widetilde{V} : \tilde{A} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{V}(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + 2\frac{g}{L}(1 - \cos(x)) + \frac{1}{2}(y + cx)^2.$$

Notemos que $\widetilde{V}(0,0) = 0$ e $\widetilde{V}(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \tilde{A}$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$. Além disso,

$$\langle \nabla \widetilde{V}(x,y), \tilde{f}(x,y) \rangle = -cy^2 - \frac{g}{L} cx \mathrm{sen}(x).$$

Agora, como $x\text{sen}(x) > 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$, concluímos que

$$\langle \nabla \widetilde{V}(x,y), \tilde{f}(x,y) \rangle < 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in \tilde{A} \setminus \{(0,0)\},$$

ou seja, $\widetilde{V}$ é uma função de Lyapunov estrita para $(0,0)$. Portanto, pelo Critério de Lyapunov, $(0,0)$ é um ponto singular assintoticamente estável para (4.6). Perceba que a nova função de Lyapunov $\widetilde{V}$ não tem um significado físico relacionado diretamente ao movimento do pêndulo com amortecimento. No entanto, ela é valiosa para garantir, por meio do Critério de Lyapunov, que o ponto $(0,0)$ é assintoticamente estável.

Para finalizar esta seção gostaríamos de destacar que o Critério de Lyapunov não nos fornece uma metodologia direta para a construção de uma função de Lyapunov. No entanto, em situações em que os sistemas representam fenômenos físicos conservativos, é relevante considerar a energia total como uma possível função de Lyapunov. Contudo, mesmo em casos onde o conceito de energia física não é aplicável, o Critério de Lyapunov pode ser empregado. Nessas circunstâncias, uma abordagem baseada em tentativa e erro pode ser necessária para encontrar uma função de Lyapunov adequada. Este conceito é extensivamente aplicado em equações do tipo parabólicas e hiperbólicas para determinar o comportamento assintótico da energia associada à solução do sistema. Para o leitor interessado neste tópico recomendamos a leitura das seguintes referências [2, 29].

# 5 Estudo do Comportamento Assintótico em uma Equação Semilinear de Segunda Ordem

Nesta seção, apresentamos o principal resultado deste artigo, o qual constitui uma aplicação direta do Critério de Lyapunov. Especificamente, iremos estabelecer condições sob as quais é possível caracterizar o comportamento assintótico das soluções da seguinte equação semilinear de segunda ordem

$$u'' + au' + bg'(u) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

em que $a$ e $b$ são parâmetros positivos, sendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ que atende ao seguinte requisito

$(g_1)$ Existem $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tais que $g(\alpha) = 0$ e

$$g(s) > 0 \quad \text{para todo } s \in (\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta).$$

**Observação 5.1.** *Importante destacar que, na equação (5.1), a expressão $g'(u)$ refere-se à derivada de $g$ com respeito à sua variável natural $s$, e não à derivada de $g$ em relação ao tempo $t$. Assim, $g'(u)$ indica a aplicação da função $g'$ ao argumento $u$, e não uma derivada temporal.*

Em particular, investigaremos a existência de soluções $u = u(t)$ da equação (5.1) que exibem o seguinte comportamento assintótico no infinito

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0.$$

Este comportamento implica que, conforme $t \to +\infty$, as soluções tendem ao valor $\alpha$ e sua taxa de variação se anula, sugerindo uma estabilização no valor $\alpha$ ao longo do tempo. Antes de enunciarmos o teorema principal, ilustramos a condição $(g_1)$ com alguns exemplos representativos de funções $g$ que atendem a este critério. Esses exemplos são:

(1) $g(s) = \alpha - \alpha \cos\left(\dfrac{2\pi s}{\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$.

(2) $g(s) = (s^2 - \alpha^2)^p$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p > 1$.

Além desses casos específicos, consideramos também uma formulação mais geral para $g$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(0) = 0$ e $f(s) > 0$ para $s \neq 0$, então a função

$$g(s) = f(s - \alpha)$$

também satisfaz a condição $(g_1)$. Este tipo de função oferece uma abordagem flexível para construir modelos que satisfaçam $(g_1)$, ampliando o escopo do nosso resultado para uma variedade de cenários práticos.

Vejamos agora o nosso principal resultado.

**Teorema 5.2.** *Admitimos a condição $(g_1)$ sobre $g$. Existe uma solução $u = u(t)$ para a equação (5.1) tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \alpha \quad e \quad \lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0.$$

*Demonstração.* Para transformar a equação original (5.1) em um sistema de primeira ordem, começamos definindo as variáveis auxiliares $x = u$ e $y = u'$. Com essas substituições, podemos reescrever a equação como o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - bg'(x). \end{cases} \tag{5.2}$$

Esse sistema facilita a análise da dinâmica das soluções de (5.1) no plano de fase, ao transformar a equação de segunda ordem em um par de equações de primeira ordem interligadas. Alternativamente, podemos representar o sistema (5.2) em notação vetorial

$$z' = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

em que $z = (x, y)$ e o campo vetorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$f(x, y) = (y, -ay - bg'(x)).$$

De acordo com a condição $(g_1)$, existe um ponto $\alpha$ tal que $g(\alpha) = 0$ e $g(s) > 0$ em uma vizinhança de $\alpha$, o que indica que $\alpha$ é um ponto de mínimo local para $g$. Neste contexto, o ponto $(\alpha, 0)$ no espaço $\mathbb{R}^2$ representa um ponto singular do sistema (5.2), pois $f(\alpha, 0) = (0, 0)$. Nosso próximo objetivo é demonstrar que o ponto $(\alpha, 0)$ é estável. Para isso, podemos aplicar o Critério de Lyapunov, considerando a seguinte função candidata a função de Lyapunov $V : (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + bg(x).$$

Agora, conforme $(g_1)$, $V(\alpha, 0) = 0$ e

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + bg(x) \geq bg(x) > 0, \quad \forall\ (x, y) \in ((\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times \mathbb{R}) - \{(\alpha, 0)\}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \langle (bg'(x), y), (y, -ay - bg'(x)) \rangle \\
&= bg'(x)y - ay^2 - bg'(x)y \\
&= -ay^2 \leq 0, \quad \forall\ (x, y) \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos concluir que $V$ atua como uma função de Lyapunov para $(\alpha, 0)$. Portanto, de acordo com o Critério de Lyapunov, $(\alpha, 0)$ é um ponto estável. A seguir, empregaremos o Teorema 3.10 para assegurar a estabilidade assintótica de $(\alpha, 0)$. Para isso, observe que

$$\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle = 0 \Leftrightarrow -ay^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Sabemos que a derivada temporal de $x$, dada por $x' = y$, também se anula em tais pontos, pois $y = 0$ implica $x' = 0$. Consequentemente, a única trajetória do sistema $(x(t), y(t))$ que satisfaz $\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle = 0$ ao longo do tempo é a solução constante $(x, y) = (\alpha, 0)$. Assim, concluímos que $\varphi_x(t) = (\alpha, 0)$ é a única trajetória no conjunto

$$\{(x, y) \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times \mathbb{R} : \langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle = 0\}.$$

Logo, pelo Teorema 3.10, $(\alpha, 0)$ é assintoticamente estável. Por definição, existe $\lambda > 0$ tal que se $(x(t), y(t))$ é uma trajetória do sistema (5.2), com $\|(x(0), y(0)) - (\alpha, 0)\| < \lambda$, então $(x(t), y(t))$ está definida para todo $t \geq 0$ e

$$\lim_{t \to +\infty} \|(x(t), y(t)) - (\alpha, 0)\| = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

Usando o Teorema de Existência de soluções para equações diferenciais ordinárias, existe uma solução $u(t)$ da equação (5.1) com a condição de que a distância entre $(u(0), u'(0))$ e $(\alpha, 0)$ seja menor que $\lambda$, ou seja,

$$\|(u(0), u'(0)) - (\alpha, 0)\| < \lambda.$$

Portanto, podemos afirmar que, devido ao fato de que a trajetória $(u, u')$ é uma solução do sistema (5.2),

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} u'(t) = 0,$$

o que prova o resultado. □

# 6 Conclusão

Neste trabalho, exploramos e apresentamos o conceito de estabilidade e o Critério de Lyapunov. Analisamos a interação entre o Critério de Lyapunov e às equações que governam o movimento do pêndulo simples e do pêndulo amortecido, destacando a relação entre os princípios físicos e a estabilidade do sistema. Além disso, discutimos uma aplicação do Critério de Lyapunov para uma classe de equações semilineares de segunda ordem (veja (5.1)), que generalizam as equações do pêndulo em certo sentido, associando-as a um sistema autônomo e demonstrando que o estudo da estabilidade desse sistema descreve o comportamento assintótico das soluções no infinito.

Esses resultados evidenciam o potencial do Critério de Lyapunov como ferramenta para a análise qualitativa de equações diferenciais. Em particular, verificamos que sua aplicação permite uma interpretação física e matemática consistente do comportamento assintótico das soluções, ampliando sua relevância na teoria dos sistemas dinâmicos.

Com relação à equação (5.1), aplicamos o Critério de Lyapunov no caso em que a constante $a$ é positiva. No entanto, quando $a = 0$, a função de Lyapunov não é estrita, e o Teorema 3.10 não pode ser aplicado diretamente neste caso. Essa limitação sugere a necessidade de investigações futuras que aprofundem a compreensão desse caso

específico e explorem possíveis abordagens alternativas, como a definição de uma nova função de Lyapunov que seja estrita.

Dessa forma, este estudo abre caminhos para novas pesquisas sobre o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais utilizando o Critério de Lyapunov. Esperamos que os resultados aqui apresentados sejam úteis para alunos, professores, pesquisadores e demais interessados em equações diferenciais e sistemas dinâmicos, contribuindo para avanços teóricos e aplicados nessa área.

**Agradecimentos:** Os autores gostariam de agradecer aos avaliadores anônimos por suas sugestões inestimáveis, que contribuíram significativamente para o aprimoramento deste artigo.

# Referências

[1] Allen, Samuel; Cahn, John. A microscopic theory for the antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. Acta Metallurgica, **27** (1979), n. 6, 1085-1095.

[2] Bacciotti, Andrea; Rosier, Lionel. *Liapunov functions and stability in control theory.* 2ª Edition, Springer Berlin, Heidelberg, 2005.

[3] Barrett, J. F. Bibliography of A. M. Lyapunov's work. International Journal of Control, **55** (1992), n. 3, 785-790.

[4] Bonheure, Denis; Sanchez, Luís. Heteroclinic orbits for some classes of second and fourth order differential equations. Handbook of differential equations: ordinary differential equations, **3** (2006), North-Holland, 103-202.

[5] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* 9ª Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[6] Coelho, Flávio U.; Lourenço, Mary L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª Edição, Edusp, São Paulo, 2024.

[7] Doering, Claus I.; Lopes, Artur O. *Equações diferenciais ordinárias.* 5ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[8] Frenkel, J.; Kontorova, T. On the theory of plastic deformation and twinning. Izv. Akad. Nauk, Ser. Fiz., **1** (1939), 137-149.

[9] Gavioli, Andrea; Sanchez, Luís. On a class of bounded trajectories for some non-autonomous systems. Mathematische Nachrichten, **281** (2008),n. 11, 1557-1565.

[10] Gavioli, Andrea. On the existence of heteroclinic trajectories for asymptotically autonomous equations. Topol. Method Nonlinear Anal., **34** (2009), n. 2 251-266.

[11] Gavioli, Andrea. Monotone heteroclinic solutions to non-autonomous equations via phase plane analysis. Nonlinear Differ. Equ. Appl., **18** (2011), n. 1, 79-100.

[12] Gavioli, Andrea. Heteroclinic connections for a double-well potential with an asymptotically periodic coefficient. J. Differential Equations., **263** (2017), n. 3, 1708-1724.

[13] Hirsch, Morris W.; Smale, Stephen; Devaney, Robert L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 3ª Edition, Academic Press, Boston, 2013.

[14] de Menezes Neto, J. L.; Carvalho, Adecarlos C.; Carvalho, Renata F. L.. Estabilidade paramétrica de um pêndulo carregado próximo a um fio carregado oscilante. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, **8** (2023), n. 3, 1-19.

[15] Kelley, Walter G.; Peterson, Allan C. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. 2ª Edition, Springer, New York, 2010.

[16] Lima, Elon L. *Curso de Análise. Vol. 1*, 15ª Edição, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2022.

[17] Lima, Elon L. *Curso de Análise. Vol. 2*, 12ª Edição, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2020.

[18] MacTutor History of Mathematics. (n.d.). Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov/. Acesso em: 9 out. 2024.

[19] Mawhin, Jean. Global results for the forced pendulum equation. Handb. Differ. Equ., **1** (2004), 533-589.

[20] Perthame, Benoît. *Parabolic Equations in Biology: Growth, Reaction, Movement and Diffusion*. 1ª Edition, Springer, Nova York, 2015.

[21] Perthame, Benoît. *Transport Equations in Biology*. 1ª Edition, Springer Science & Business Media, Heidelberg, 2006.

[22] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.

[23] Scárdua, Bruno. *Equações Ordinárias e Aplicações*. 1ª Edição, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[24] Sotomayor, Jorge. *Equações Diferenciais Ordináias*. Textos Universitários do IME-USP, Livraria da Física, São Paulo, 2011.

[25] Sotomayor, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordináias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[26] Strang, Gilbert. *Introduction to Linear Algebra*. 6ª Edition, Wellesley-Cambridge Press, 2023.

[27] Viana, Marcelo; Espinar, José. *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*. Oxford University Press, 2011.

[28] Vinograd, Robert È.. The inadequacy of the method of characteristic exponents when applied to non-linear equations. Doklady Akademii Nauk., Russian Academy of Sciences, **114** (1957), n. 2, 239-240.

[29] Zuazua, Enrique; Darlis Bracho T.. *Exact Controllability and Stabilization of the Wave Equation*. 1ª Edition, Springer, Heidelberg, 2024.

Recebido em 12 de Novembro de 2024
Revisado em 16 de Janeiro de 2025
Aceito em 07 de Março 2025