Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i1.19950

QUANTIDADES EXTENSIVAS E QUANTIDADES INTENSIVAS: RELAÇÕES COM O ENSINO DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES MATEMÁTICAS

Extensive quantities and intensive quantities: relations with teaching mathematical problem solving

Thiago Beirigo Lopes
Instituto Federal de Mato Grosso – IFMT
thiago.lopes@ifmt.edu.br

Pedro Franco de Sá
Universidade do Estado do Pará – UEPA
pedro.sa@uepa.br

Resumo
Grandezas intensivas como densidade, velocidade, entre outras, têm sido relativamente negligenciadas no ensino, pois os estudos são majoritariamente realizados com quantidades extensivas. Diante disso, surge a questão norteadora da pesquisa que é: Quais as contribuições que a compreensão de quantidades intensivas e quantidades extensivas podem trazer para o ensino de resolução de questões matemáticas? Como resposta a essa questão norteadora, esse ensaio teórico traz os resultados de um estudo cujo objetivo foi analisar como quantidades extensivas e quantidades intensivas se relacionam com o ensino de resolução de questões matemáticas. É discutido no texto as implicações no ensino de resolução de questões matemáticas, abordando fatores que influenciam na dificuldade de sua resolução, como a estrutura semântica da questão, o número, a complexidade sintática e a posição da quantidade incógnita. A partir de uma revisão bibliográfica, o ensaio teórico apresentou os resultados da análise sobre como essas duas categorias de quantidades podem ser compreendidas e utilizadas no ensino de matemática. O texto também apresenta o desafio dos estudos de razão, que envolvem quantidades intensivas, um tipo de quantidade conceitualmente mais exigente do que aquelas que são avaliadas por contagem ou medição, denominadas extensivas. É indicado que as abordagens curriculares atuais geralmente falham em promover o raciocínio dos estudantes sobre quantidades intensivas.
Palavras-chave: Ensino. Matemática. Quantidade Extensiva. Quantidade Intensiva. Resolução de Questões.

Abstract
Intensive quantities such as density, velocity, among others, have been relatively neglected in teaching, as studies are mostly carried out with extensive quantities. Therefore, the research's guiding question arises: What are the contributions that the understanding of intensive quantities and extensive quantities can bring to the teaching of solving mathematical questions? In response to this guiding question, this theoretical essay brings the results of a study whose objective was to analyze how extensive quantities and intensive quantities relate to the teaching of solving mathematical questions. The text discusses the implications for teaching solving mathematical questions, addressing factors that influence the difficulty of solving them, such as the semantic structure of the question, the number, the syntactic complexity and the position of the unknown quantity. Based on a bibliographic review, the theoretical essay presented the results of the analysis on how these two categories of quantities can be understood and used in mathematics teaching. The text also presents the challenge of ratio studies, which involve intensive quantities, a type of quantity conceptually more demanding than those that are evaluated by counting or measuring, called extensive. It is pointed out that current curricular approaches generally

fail to promote students' thinking about intensive quantities.
Keywords: Teaching. Mathematics. Extensive Quantity. Intensive Quantity. Question Resolution.

INTRODUÇÃO

A resolução de questões matemáticas é uma atividade que requer a compreensão de conceitos fundamentais para a análise dos problemas. Entre esses conceitos, destacam-se as quantidades[1] intensivas e as quantidades extensivas, que estão presentes em diversas áreas da matemática, incluindo a álgebra, a geometria e a análise.

As quantidades extensivas são grandezas que dependem da quantidade de material presente em um sistema, enquanto as quantidades intensivas são grandezas que não dependem da quantidade de material, mas sim da sua natureza. Por exemplo, a massa é uma quantidade extensiva, pois depende da quantidade de matéria presente em um objeto, enquanto a densidade é uma quantidade intensiva, pois é uma propriedade do material em si.

Nesse sentido, entender a relação entre quantidades intensivas e quantidades extensivas é fundamental para a resolução de questões matemáticas, pois permite que sejam aplicados os conceitos corretos em cada situação. Por exemplo, para calcular a densidade de um objeto, é necessário utilizar a massa e o volume, que são grandezas extensivas, para obter uma grandeza intensiva.

Diante disso, surgiu a questão norteadora da pesquisa que é: Quais as contribuições que a compreensão de quantidades intensivas e quantidade extensivas podem trazer para o ensino de resolução de questões matemáticas?

Assim, como resposta a essa questão norteadora, esse artigo traz um ensaio teórico cujo objetivo foi analisar como quantidades extensivas e quantidades intensivas se relacionam ao ensino de resolução de questões matemáticas. De tal modo, este artigo baseia-se em uma particular exploração teórica para o estabelecimento de relações entre quantidades extensivas e quantidades intensivas durante o ensino sobre a compreensão necessária para a resolução de questões matemáticas.

Um ensaio teórico é uma modalidade de texto acadêmico que tem como finalidade apresentar uma análise crítica e reflexiva sobre um tema específico, utilizando conceitos, teorias e referências bibliográficas pertinentes. Assim, o ensaio teórico não se baseia em dados empíricos, mas na construção de argumentos a partir de uma pesquisa bibliográfica previamente

[1] Para esclarecer a utilização de quantidades e grandezas no texto, há de destacar que é entendido como grandeza a relação com a natureza do item, como massa, volume, velocidade, densidade, entre outros. Já quantidade se refere à mensuração ou quantificação do item, como 5 gramas, 7 litros, 20 m/s, 1,2 kg/m³, entre outros.

realizada. De acordo com Meneghetti (2011), o ensaio teórico permite aprofundar a discussão sobre um tema de forma mais ampla e abrangente, explorando diferentes perspectivas e oferecendo novas interpretações. Além disso, o ensaio teórico é uma forma de contribuir para a produção de conhecimento científico ao oferecer novas ideias e perspectivas sobre um determinado tema (SOARES, PICOLLI, CASAGRANDE, 2018).

QUANTIDADE INTENSIVA E QUANTIDADE EXTENSIVA

Um importante aporte teórico para o entendimento em relação à sentença natural é a concepção de números intensivos e números extensivos. De acordo com Nolasco (2013), a representação do número, em relação à quantidade, é esclarecida por Kant com base em um axioma da intuição, ao mesmo instante em que a representação é uma antecipação da percepção. Kant (2015) indica que toda intuição é quantidade extensiva e todo fenômeno real é quantidade intensiva. Ainda, de acordo com Simon e Placa (2012), um número não é elemento primitivo, um número é resultado da medição de uma quantidade com uma unidade de medida.

Segundo Wohlfart (2017), Hegel explicita que, de forma aparente e imediata, a quantidade é contraposta à qualidade como conceitos excludentes, na medida em que a qualidade trata da quantidade intensiva e a quantidade trata da quantidade extensiva. No entanto, a elucidação hegeliana vai em outro rumo, em que a qualidade e a quantidade são dinamicamente associadas de modo diretamente proporcional. Desse modo, em sua exposição, qualidade e quantidade estão implicadas, respectivamente, como a interioridade e a exterioridade.

Em uma visão mais próxima do campo linguístico matemático (não tão filosófico quanto às anteriores), Nunes, Desli e Bell (2003, p. 652) indicam que

> Piaget (1952), no glossário de seu livro The Child's Conception of Number, explicou essa diferença entre quantidades extensivas e intensivas. Ele definiu quantidade extensiva como o nome dado a qualquer magnitude que seja suscetível de adição real, como por exemplo massa ou capacidade - a massa de um corpo formado por dois corpos é a soma das massas dos corpos originais. Ele definiu quantidade intensiva como o nome dado a qualquer magnitude que não é suscetível de adição real, como por exemplo temperatura. Duas quantidades de água em 15º e 25º respectivamente não produzem uma mistura em 40º (p. 244).

Já Schwartz (1988, *apud* Sá, 2003) indica que uma quantidade extensiva expressa a extensão de um conjunto ou porção de entidade ou substância, podendo ser contínua ou discreta. Como exemplo, tem-se as quantidades 4 mesas e 2,5 kg de arroz, estas são, respectivamente, quantidades extensivas discreta e contínua. Ainda, as operações de adição, subtração e

multiplicação que envolvem números extensivos continuam a ter como resultado um número extensivo. Já Nunes *et al* (2010) indica que a lógica das quantidades extensivas se baseia na relação parte-todo, portanto campo aditivo. Ainda de acordo com os autores, a lógica das quantidades intensivas se baseia em uma relação entre duas quantidades de naturezas distintas, portanto no campo multiplicativo.

Nesse sentido, Sá (2003) indica que as quantidades intensivas são razões entre quantidade extensivas que descrevem o aspecto intensivo de uma entidade ou substância distintas. Assim, ao contrário das quantidades extensivas, as intensivas não são aditivas (adição e subtração). Nunes *et al* (2010) e Howe, Nunes e Bryant (2010) exemplificam essa situação em uma questão simples, que consiste em se ter um suco de laranja com 80% de concentrado e outro suco de laranja com 20% de concentrado, em que a concentração do todo não é 80%+20%=100%. Pois, os números 80 e 20 não podem ser somados sem ser levada em consideração a quantidade de água.

Em suma, as quantidades intensivas e quantidades extensivas são conceitos fundamentais em diversas áreas da ciência, incluindo a matemática. Essas grandezas são usadas para descrever propriedades de sistemas físicos e químicos, bem como para modelar fenômenos naturais. No contexto do ensino de resolução de questões matemáticas, a compreensão desses conceitos pode trazer diversas implicações importantes.

Uma quantidade extensiva é a mensuração de uma grandeza que é proporcional ao tamanho ou à extensão do sistema. Por exemplo, a massa de um objeto é uma quantidade extensiva, pois depende do tamanho do objeto. Se um objeto for dividido em pedaços menores, cada pedaço terá uma massa proporcional à sua fração do objeto original. Outros exemplos de quantidades extensivas incluem volume, área e comprimento.

Por outro lado, uma quantidade intensiva é a mensuração de uma grandeza que não depende do tamanho ou da extensão do sistema, mas da sua natureza ou composição. Um exemplo de quantidade intensiva é a densidade de um objeto, que é definida como a quantidade de massa dividida pela quantidade de volume. A densidade de um objeto é a mesma independentemente do tamanho do objeto, pois ela depende apenas da sua composição.

Diante das explanações sobre quantidades extensivas e quantidades intensivas, pode-se indicar que essas integram e são relevantes ao processo de ensino e de aprendizagem devido expressarem duas quantidades numéricas natureza distintas, em que a quantidade intensiva tem íntima relação com questões matemáticas de multiplicação.

IMPLICAÇÕES NO ENSINO DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES MATEMÁTICAS

Hiebert (1982) indica que a estrutura semântica da questão, o número, a complexidade sintática e a posição da quantidade incógnita são fatores relacionados com a dificuldade em sua resolução. Assim, o autor supracitado concluiu que a posição causa interferência na compreensão e na escolha da operação para solucionar a questão. Sá (2003), ao citar Nesher, Greeno e Riley (1982), sugere que as questões algébricas (do tipo: quantidade a operada por uma quantidade desconhecida resulta na quantidade b") são de mais difícil resolução em relação às questões aritméticas para os estudantes e que o motivo desta dificuldade pode estar atrelado ao modo que essas questões são apresentadas. Usualmente depois do ensino de cada uma das operações fundamentais da matemática, essas operações são apresentadas com apelo ao seu significado semântico, em que não há destaque às relações entre as operações.

Desse modo, pode-se afirmar que na resolução das questões aritméticas as propriedades aditivas e multiplicativas da igualdade não são utilizadas, enquanto em questões algébricas essas propriedades podem ser utilizadas. O uso da operação inversa, para manter a validade da igualdade, é a essência do método de resolver equações e uma das características da álgebra é a resolução delas.

Um dos desafios dos estudos de razão é que, diferente de questões de adição e subtração, ela envolve também quantidades intensivas, que é um tipo de quantidade conceitualmente mais exigente do que aquelas que são avaliadas por contagem ou medição, denominadas extensivas (SIMON; PLACA, 2012). Em estudos escolares sobre matemática, quantidades intensivas não são encontradas somente em situações de razão, mas também são encontradas em situações de multiplicação e divisão. No entanto, as abordagens curriculares atuais geralmente falham em promover o raciocínio dos estudantes sobre quantidades intensivas (CARVALHO; VIZOLLI; PEREIRA, 2020).

Ao fazer inter-relações entre quantidades extensivas e quantidades intensivas, Carpenter *et al* (1993) indica que as questões aditivas apresentadas aos estudantes no início de sua carreira escolar geralmente envolvem somente quantidades extensivas, que são quantidades que podem ser representadas diretamente. Já as questões multiplicativas, por sua própria essência, envolvem tanto quantidades extensivas quanto intensivas, que são quantidades derivadas de outras quantidades (como quilômetros por hora ou biscoitos por caixa, por exemplo). Desse modo, a resolução de questões de multiplicação e divisão presumivelmente teriam que ser mais complexas do que aquelas que envolvem adição e subtração.

Sobre quantidades intensivas na multiplicação, Simon e Placa (2012, p. 35) citam que

> Schwartz (1988) argumentou que o raciocínio multiplicativo envolve novas quantidades que são integrais à multiplicação: quantidades intensivas. Em contraste com quantidades extensivas, como comprimento, massa, área ou volume, que podem ser medidas diretamente, ou o número de itens em um conjunto, que podem ser contados, quantidades intensivas, como velocidade ou concentração, não podem ser medidas diretamente ou contadas. Em vez disso, quantidades intensivas expressam a relação entre duas quantidades, que podem ser intensivas ou extensivas. Schwartz (1988) descreveu as quantidades intensivas como a generalização da noção de densidade de um atributo, ou seja, a intensidade de um traço (por exemplo, velocidade, cor, temperatura, povoamento).

Thompson (1994) enfatizou a importância de distinguir o raciocínio dos estudantes sobre quantidades intensivas como uma associação de duas quantidades extensivas. Por exemplo, muitos estudantes podem não perceber um preço de algum determinado produto como uma quantidade intensiva. O preço para eles é um valor em dinheiro, quantidade extensiva, associada a um quantitativo de um produto a ser adquirido. Dessa forma, 3kg de maçãs a R$2,00 por kg são vistos como R$2,00 associado ao primeiro kg, R$2,00 associado ao segundo kg e R$2,00 associado ao terceiro kg. Assim, o preço é visto como uma soma sucessiva de quantidades extensivas e não como uma quantidade intensiva.

Schwartz (1988), citado por Simon e Placa (2012), apontou que a multiplicação é uma operação de transformação do referente e que em um problema de multiplicação convencional, cada uma das três quantidades envolvidas é caracterizada por um referente ou unidade diferente. Por exemplo, 3kg de maçãs multiplicado por 2 reais/kg é igual a 6 reais. Os estudantes que raciocinam apenas com a adição entre 3 quantidades extensivas, resolvem o problema usando uma operação de preservação de referente.

Visualizar somente o resultado do que foi multiplicado é abandonar uma variedade de conceitos. Pode-se engajar em adição repetida para avaliar o resultado de uma multiplicação, mas imaginar adicionar alguma quantidade repetidamente não pode abranger toda conceituação de multiplicação (THOMPSON; SALDANHA, 2003).

A divisão de números inteiros comumente é realizada sem raciocinar sobre quantidades intensivas. Por exemplo, questões de divisão quotitiva[2] são propriamente entendidos como situações em que a quantidade por grupo é conhecida e o número de grupos deve ser determinado. Considere a questão ‘Quantos pedaços de corda de 10cm podem ser retirados de uma corda de comprimento igual a 120cm?’, a ideia implícita nessa divisão é que 120cm de corda pode ser medido repetidamente com um pedaço de corda de 10cm. Essa ideia implícita

[2] Situação que envolve a ideia de encontrar uma quantidade suficiente para dividir cada quota envolvida (SOUZA, 2015).

pode ser realizada fisicamente e pode fornecer uma base para abstrair os aspectos dessa divisão, porém ela envolve raciocínio apenas com quantidades extensivas. Essa abordagem sobre divisão não envolve a quantidade intensiva, 10cm/peça.

Ao propor uma questão em situação isomórfica à anterior, como 'Se você correr a 10km/h, quanto tempo levará para percorrer 120km?', não há a possibilidade de medir 120km repetidamente por 10km/h, visto que são grandezas diferentes. A noção de divisão comumente apresentada nas escolas deriva de um modelo de multiplicação e divisão em que todas as quantidades são consideradas extensivas. "Por um lado, esta concepção é facilmente acessível e muitas vezes uma abordagem espontânea dos estudantes. No entanto, por outro lado, não desenvolve a compreensão de quantidades intensivas (SIMON; PLACA, 2012, p. 38).

Frações, por exemplo, são normalmente ensinadas em um contexto de quantidades extensivas: os estudantes aprendem como partes idênticas de uma determinada área ou como segmentos divididos em partes iguais na reta numérica. No entanto, de acordo com Nunes, Desli e Bell (2003), eles também podem aprender a expressar matematicamente o fato de que em dois copos de suco de limão, um não é tão doce quanto o outro, indicando a fração da composição de açúcar em cada suco. É bem possível que explorar o significado de frações no contexto de quantidades extensivas e intensivas não apenas ajude as crianças a entender melhor as quantidades intensivas, mas também as ajude a alcançar uma melhor compreensão das frações.

Nunes *et al* (2010, p. 148) indicam que o "[...] obstáculo básico à compreensão das quantidades intensivas reside na dificuldade que as crianças têm em pensar 'relativamente', de modo especial, quando as relações a serem consideradas são inversas". Em geral para algumas pessoas, algumas das ideias que inicialmente são mantidas firmemente sobre quantidades se aplicam a quantidades extensivas, mas não a quantidades intensivas. Como exemplo, a maioria das pessoas concordariam que, para qualquer quantidade, o todo é igual à soma das partes. No entanto, isso não se aplica a quantidades intensivas (NUNES; DESLI; BELL, 2003).

Ainda sobre o ensino de resolução de questões matemáticas, a compreensão desses tipos de quantidades é importante devido à distinção entre quantidades intensivas e extensivas ser fundamental para cálculos no quais envolvem grandezas físicas. Voltando ao exemplo de densidade, quando ela é calculada, é necessário considerar suas grandezas de massa e de volume, que são medidas em quantidades extensivas, mas a densidade é uma grandeza massa/volume que é mensurada em quantidade intensiva.

Por fim, a compreensão desses conceitos também pode ajudar os estudantes a compreender as aplicações da matemática em outras áreas, como a física e a química. Muitos fenômenos naturais podem ser descritos em termos de grandezas intensivas e extensivas, e a

compreensão desses conceitos pode ajudar os estudantes a entender melhor esses fenômenos e como a matemática pode ser utilizada para modelá-los.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora existam várias pesquisas que investigam sobre resolução de questões, ainda há uma lacuna nos estudos dessas questões quando são analisadas sob a perspectiva de quantidades extensivas e quantidades intensivas. Visto que essa primeira é amplamente abordada por ser algo mais perceptível na realidade, enquanto a segunda é negligenciada por necessitar de processos mais complexos para seu entendimento. Nos estudos de Nunes, Desli e Bell (2003) ficou claro que estudantes com 7 anos ou menos têm bastante dificuldade em resolver questões com quantidades intensivas. O que as próprias autoras afirmaram desdizer a hipótese postulada por Freudenthal, em que estudantes a partir dos cinco anos de idade poderiam compreender o que são quantidades intensivas.

Como explanado, os estudantes tendem a interpretar quantidades "por um" como a quantidade extensiva associada a 1 unidade de outra quantidade extensiva, continuando assim a pensar exclusivamente em quantidades extensivas (SIMON; PLACA, 2012, p. 39).

Diante dessas constatações, conclui-se que o objetivo proposto neste ensaio teórico foi atingido, pois foi tratado o que são quantidades extensivas e quantidades intensivas estabelecendo relações com o ensino e, como consequência, o aprendizado do estudante. É discutido no texto as implicações no ensino de resolução de questões matemáticas, abordando fatores que influenciam na dificuldade de sua resolução, como a estrutura semântica da questão, o número, a complexidade sintática e a posição da quantidade incógnita. É indicado que a posição da quantidade incógnita pode interferir na compreensão e na escolha da operação para solucionar a questão. Além disso, destaca que as questões algébricas são mais difíceis de serem resolvidas em relação às questões aritméticas, pois envolvem o uso de propriedades aditivas e multiplicativas da igualdade, além da operação inversa.

O ensaio também apresenta o desafio dos estudos de razão, que envolvem quantidades intensivas, um tipo de quantidade conceitualmente mais exigente do que aquelas que são avaliadas por contagem ou medição, denominadas extensivas. É indicado que as abordagens curriculares atuais geralmente falham em promover o raciocínio dos estudantes sobre quantidades intensivas.

Não foi finalidade dessa pesquisa, abranger todas as pesquisas realizadas em que de alguma forma envolveram explicitamente ou implicitamente quantidades extensivas e

quantidades intensivas. Mas acredita-se que esse artigo possa contribuir para subsidiar futuras pesquisas sobre resolução de questões matemáticas que envolvem o campo aditivo e o campo multiplicativo.

Howe, Nunes e Bryant (2010, p. 308), depois de revisarem várias pesquisas anteriores com quantidades intensivas, os autores indicam dois fatores que endossam a importância dessas quantidades para o raciocínio das crianças. "Sugere, portanto, que, a menos que quantidades intensivas recebam maior destaque na pesquisa, o processo de desenvolvimento permanecerá incompletos".

Referências

CARPENTER, Thomas P. *et al*. Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 24, n. 5, p. 428-441, 1993. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749152. Acesso em: 12 jul. 2020.

CARVALHO, Euvaldo; VIZOLLI, Idemar; PEREIRA, Onesimo Rodrigues. A abordagem de fração em livros didáticos de matemática do sexto ano do ensino fundamental aprovados no PNLD. **Revista Prática Docente**, Confresa, v. 5, n. 3, p. 1529-1546, 2020. Disponível em: http://periodicos.cfs.ifmt.edu.br:443/periodicos/index.php/rpd/article/view/826. Acesso em: 15 mar. 2021.

HIEBERT, James. The position of the unknown set and children's solutions of verbal arithmetic problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 13, n. 5, p. 341-349, nov. 1982. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749008?seq=1. Acesso em: 12 jun. 2020.

HOWE, Christine; NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. Intensive quantities: Why they matter to developmental research. **British journal of developmental psychology**, v. 28, n. 2, p. 307-329, 2010. Disponível em: https://bpspsychub.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1348/026151009X410362. Acesso em: 13 maio 2020.

KANT, Emmanuel. **Crítica da Razão Pura**. Tradução de Fernando Costa Mattos. São Paulo: Editora Vozes, 2015.

MENEGHETTI, Francis Kanashiro. O que é um ensaio-teórico? **Revista de Administração Contemporânea**, v. 5, n. 2, p. 320-332, abr. 2011. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rac/a/4mNCY5D6rmRDPWXtrQQMyGN/?lang=pt. Acesso em: 2 abr. 2023.

NESHER, Pearla; GREENO, James G.; RILEY, Mary S. The development of semantic categories for addition and subtraction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 13, p. 373-394, 1982. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED245879.pdf. Acesso em: 12 abr. 2020.

NOLASCO, Fábio Mascarenhas. Aspectos para uma história crítica da Análise: analítica kantiana e lagrangiana. **Revista Eletrônica Estudos Hegelianos**, v. 10, n. 18, p. 64-76, 2013. Disponível em: http://ojs.hegelbrasil.org/index.php/reh/article/view/68/61. Acesso em: 25 maio 2018.

NUNES, Terezinha *et al*. **Educação Matematica:** Numeros e Operações Numericas. São Paulo: Editora Cortez, 2010.

NUNES, Terezinha; DESLI, Despina; BELL, Daniel. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, v. 39, n. 7, p. 651-675, 2003. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0883035504000849. Acesso em: 12 fev. 2020.

SÁ, Pedro Franco de. **Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear**. 2003. 203 f. Natal: Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rrio Grande do Norte, Natal, 2003.

SCHWARTZ, Judah L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: HIEBERT, James; BEHR, Merlyn (Org.). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 41–52.

SIMON, Martin A.; PLACA, Nicora. Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. **For the Learning of Mathematics**, v. 32, n. 2, p. 35-41, 2012. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/23391962. Acesso em: 18 jan. 2020.

SOARES, Sandro Vieira; PICOLLI, Icaro Roberto Azevedo; CASAGRANDE, Jacir Leonir. Pesquisa Bibliográfica, Pesquisa Bibliométrica, Artigo de Revisão e Ensaio Teórico em Administração e Contabilidade. **Administração: Ensino e Pesquisa**, v. 19, n. 2, p. 308-339, 2018. Disponível em: https://www.redalyc.org/journal/5335/533557910005/533557910005.pdf. Acesso em: 21 mar. 2023.

SOUZA, Emília Isabel Rabelo. **Estruturas multiplicativas:** concepção de professor do ensino fundamental. 2015. 107f. Ilhéus: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Ilhéus, 2015. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201370028D.pdf. Acesso em: 18 jun. 2020.

THOMPSON, Patrick. The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: HAREL, Guershon; CONFREY, Jere (Org.). **The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**. Albany, NY: SUNY Press, 1994. p. 181-234.

THOMPSON, Patrick W.; SALDANHA, Luis A. Fractions and multiplicative reasoning. In: KILPATRICK, Jeremy; MARTIN, W Gary; SCHIFTER, Deborah (Org.). **Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics**. [S.l.]: National Council of Teachers of Mathematics, 2003. p. 95-113.

WOHLFART, João Alberto. A lógica do ser de Hegel. **Veritas**, Porto Alegre, v. 62, n. 2, p. 467-475, 2017. Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/veritas/article/view/28128/16053. Acesso em: 25 maio 2018.