Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.20906

ZEROS DA FUNÇÃO PISO DE GRAU 2

Élis Gardel da Costa Mesquita
UFT, Palmas, Matemática
elisgardel@uft.edu.br
Fernando Soares de Carvalho
UFT, Arraias, Matemática
fscarvalho@uft.edu.br
Eudes Antonio Costa
UFT, Arraias, Matemática
eudes@uft.edu.br

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em estudar funções lineares e quadráticas envolvendo a função piso, as quais denominamos *funções piso* de graus 1 e 2, respectivamente. Mais especificamente, determinamos o conjunto de seus zeros, além de estabelecermos condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes para que tais zeros existam. Apresentamos um método que nos permite encontrar e detalhar os conjuntos solução, descrevendo-os como união finita de subintervalos da reta.

Palavras-chave: Função piso; Função linear; Função quadrática; Zeros.

Abstract

In this work, we are interested in studying linear and quadratic functions involving the floor function, which we denote as *floor functions* of degrees 1 and 2, respectively. More specifically, we determine the set of their zeros, as well as establish necessary and sufficient conditions on the coefficients for such zeros to exist. We present a method that allows us to find and detail the solution sets, describing them as a finite union of subintervals of the real line.

Keywords: Floor function; Linear function; Quadratic function; Zeros.

1 Introdução

O estudo de funções polinomiais é um problema antigo e bem conhecido na literatura especializada. Em particular, no que se refere a determinar as raízes (ou zeros) destas funções. O problema da determinação de zeros de funções polinomiais é equivalente a encontrar raízes de equações polinomiais dadas por,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ , \tag{1.1}$$

e $p(x) = 0$, com $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Para uma equação polinomial da forma $p(x) = ax + b$, temos que a raiz é $x = \frac{-b}{a}$, desde que $a \neq 0$. Enquanto que, para uma equação polinomial quadrática, temos a conhecida fórmula de Bhaskara, que fornece as duas raízes da equação (reais ou complexas). Já as equações de grau 3, podem ser resolvidas pelo método de Cardano-Tartaglia. No entanto, o matemático Niels Abel, ainda no século XIX, mostrou que não é possível obter uma fórmula para resolver a equação geral de grau 5. Finalmente, Évariste Galois resolveu completamente o problema estudando o grupo de permutação das raízes dessas equações e estabeleceu as condições exatas para a resolubilidade de uma equação polinomial, veja [1, 3, 6, 7, 8, 10].

Neste trabalho vamos considerar uma classe de funções, que são extensões das funções polinomiais, e que são conhecidas como *função piso*, conforme [4, 9]. Tais funções podem ser definidas da seguinte forma:

Definição 1.1. Chama-se de *função piso*, a função dada por,

$$f(x) = a_n \lfloor x^n \rfloor + a_{n-1} \lfloor x^{n-1} \rfloor + \cdots + a_1 \lfloor x^1 \rfloor + a_0, \tag{1.2}$$

sendo $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro menor ou igual a x, ou seja,

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

Em particular, $\lfloor x \rfloor = m$ para todo x no intervalo semiaberto (semifechado) $[m, m+1)$.

Exemplo 1.2. Veja que: $\lfloor 3 \rfloor = \lfloor 3,14 \rfloor = 3$, $\lfloor 4,5 \rfloor = \lfloor 4,9 \rfloor = 4$ e $\lfloor -2,4 \rfloor = -3$.

Nosso foco é estudar ou determinar os zeros da função dada em (1.2), ou de forma equivalente, resolver a equação,

$$a_n \lfloor x^n \rfloor + a_{n-1} \lfloor x^{n-1} \rfloor + \cdots + a_1 \lfloor x \rfloor + a_0 = 0, \tag{1.3}$$

sendo x uma indeterminada real, ou seja, $x \in \mathbb{R}$. Quando necessário vamos escrever $x = m + r$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < 1$, $r \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho nos restringimos ao estudo das soluções da Equação (1.3) para os casos $n = 1, 2$. Sem perda de generalidade, vamos escrever

$$\begin{align} a\lfloor x \rfloor + b &= 0, \tag{1.4} \\ a\lfloor x^2 \rfloor + b\lfloor x \rfloor + c &= 0, \tag{1.5} \end{align}$$

para os casos $n = 1$ e $n = 2$ (funções piso de graus 1 e 2), respectivamente.

Os trabalhos [11, 12] estudaram um conjunto de equações quadráticas envolvendo a função piso. Dentre estas equações, a Equação (1.5) foi abordada e o problema da obtenção de raízes parcialmente resolvido, em que os coeficientes considerados foram da forma $a = -2n$ e $b = n(n-1)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Neste sentido, um dos objetivos deste trabalho é estender o conjunto de coeficientes a e b a um subconjunto de $\mathbb{Z}^2$ o maior possível.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: na seção 2, são discutidas as propriedades da função piso; na seção 3, é conduzida uma análise da função piso de grau 1; por sua vez, a seção 4 dedica-se ao exame aprofundado da localização dos zeros da função piso de grau 2. Na seção 5, são fornecidos exemplos ilustrativos de aplicações práticas, enquanto a seção 6 apresenta problemas adicionais para a reflexão e o estudo do leitor interessado.

2 Algumas Propriedades

Nesta seção apresentamos algumas propriedades da função piso que são de fácil verificação, e que podem ser encontrados, na forma de resultados ou exercícios em [2, 5] ou em outras referências básicas de matemática discreta.

Propriedade 2.1. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $k = k(x) \in \mathbb{Z}$ tal que $\lfloor x \rfloor = k$.

Demonstração. Considere $A_n(x) = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$. Veja que o conjunto $A_n(x)$ é limitado superiormente, bastando tomar $k = \max A_n(x)$. Portanto, $\lfloor x \rfloor = k$. $\square$

Agora, segue diretamente que se x é um número inteiro, então $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$; e se x não for um inteiro, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Propriedade 2.2. Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;

2. $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$;

3. $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$;

4. $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor$.

Demonstração. Pela definição, temos que $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro menor ou igual a x, ou seja, $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$.

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $\lfloor x \rfloor = m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, tal que $x = m + r$ com $0 \leq r < 1$ e $r \in \mathbb{R}$. Portanto, $m \leq x < m + 1$ para $\lfloor x \rfloor = m$.

2. Temos que $\lfloor x \rfloor$ é sempre um número inteiro. Além disso, para $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\lfloor n \rfloor = n$. Logo,
$$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor \ .$$

3. Primeiro observe que $\lfloor n+m \rfloor = n+m = \lfloor n \rfloor + \lfloor m \rfloor$ para quaisquer $m,\ n$ inteiros. Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $\lfloor x \rfloor = m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x = m + r$ com $0 \leq r < 1$ e $r \in \mathbb{R}$. Assim,
$$\begin{aligned} \lfloor n + x \rfloor &= \lfloor n + (m + r) \rfloor \\ &= \lfloor (n + m) + r \rfloor \\ &= n + m \\ &= n + \lfloor x \rfloor \ . \end{aligned}$$

4. Considere $y = m + r_1$ e $x = n + r_2$, como $0 \leq r_1, r_2 < 1$. Assim
$$\begin{aligned} \lfloor x + y \rfloor &= \lfloor (m + r_1) + (n + r_2) \rfloor \\ &= \lfloor (m + n) + (r_1 + r_2) \rfloor \\ &= m + n + \lfloor (r_1 + r_2) \rfloor \\ &\geq m + n = \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.3. Para n natural e todo x real temos que $\lfloor n \cdot x \rfloor \geq n \lfloor x \rfloor$.

Demonstração. De fato, temos $x = m + r$ com $0 \leq r < 1$ e $r \in \mathbb{R}$, ou seja, $\lfloor x \rfloor = m$. Daí
$$n \cdot x = n(m + r) = n \cdot m + n \cdot r, \quad \text{com } n \cdot m \in \mathbb{N} \text{ e } n \cdot r \in \mathbb{R} \ ,$$
se $n \cdot r < 1$ então $\lfloor n \cdot x \rfloor = n \cdot m = n \lfloor x \rfloor$; caso contrário, $\lfloor n \cdot x \rfloor > n \cdot m = n \lfloor x \rfloor$. □

Destacamos que se $n \in \mathbb{Z}$, a desigualdade $\lfloor n \cdot x \rfloor \geq n \lfloor x \rfloor$ pode não se verificar. É suficiente considerar, por exemplo, $n = -2$ e $x = 3,5$. Neste caso, $\lfloor n \cdot x \rfloor$ = -7 e $n \lfloor x \rfloor = -6$.

Propriedade 2.4. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $\lfloor x \rfloor^2 \leq \lfloor x^2 \rfloor$.

Demonstração. Considerando $\lfloor x \rfloor = m \in \mathbb{Z}$, pela Propriedade 2.2 segue que $m \leq x < m+1$, ou seja, $x = m + r$ com $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq r < 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \lfloor x^2 \rfloor &= \lfloor (m+r)^2 \rfloor \\ &= \lfloor m^2 + 2mr + r^2 \rfloor \\ &= \lfloor m^2 \rfloor + \lfloor 2mr + r^2 \rfloor \\ &= m^2 + \lfloor 2mr + r^2 \rfloor \\ &\geq m^2 = \lfloor x \rfloor^2 \ . \end{aligned}$$

□

Seja f uma função real. Lembramos que f é não decrescente sempre que, para quaisquer $x_1 < x_2$ no domínio de f, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Propriedade 2.5. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função $\lfloor x \rfloor$ é não decrescente.

Demonstração. Sejam $x_1 < x_2$ reais. Se existir um inteiro t tal que $\{x_1, x_2\} \subset [t, t+1]$, então $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = t$; caso contrário, $\lfloor x_1 \rfloor < \lfloor x_2 \rfloor$. Portanto, $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor$, como desejamos. □

3 Primeiro caso: $n = 1$

Consideramos inicialmente o caso $n = 1$ na Equação (1.3). A Proposição 3.1 apresenta uma condição necessária e suficiente para que a Equação (3.1) seguinte tenha solução.

Proposição 3.1. *A equação*

$$a\lfloor x \rfloor + b = 0 \ , \tag{3.1}$$

com $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *e* $a \neq 0$, *tem solução se, e somente se,* $\frac{-b}{a}$ *é inteiro.*

Demonstração. Seja x_1 solução da Equação (3.1). Logo, $a\lfloor x_1 \rfloor + b = 0$, isto é, $\lfloor x_1 \rfloor = \frac{-b}{a}$. Como por definição $\lfloor x_1 \rfloor$ é inteiro, segue que $\frac{-b}{a}$ também o é (ou seja, a divide b). Considerando agora que $\frac{-b}{a}$ é inteiro, tem-se $\lfloor \frac{-b}{a} \rfloor = \frac{-b}{a}$. Bastando considerar $\lfloor x \rfloor = \frac{-b}{a}$, daí $a\lfloor x \rfloor + b = 0$. Portanto, o número inteiro $\frac{-b}{a}$ é solução da Equação (3.1). □

Corolário 3.2. *Se* $\frac{-b}{a}$ *é um número inteiro, então o conjunto solução da Equação* (3.1) *é dado pelo intervalo semifechado* $[\frac{-b}{a}, \frac{-b}{a} + 1)$.

Demonstração. Da Proposição 3.1, sabe-se que o número inteiro $\frac{-b}{a}$ é solução da Equação (3.1). Observa-se, adicionalmente, que $\lfloor \frac{-b}{a} + r \rfloor = \frac{-b}{a}$, para todo $0 \leq r < 1$. Portanto, o conjunto solução da equação é dado por $[\frac{-b}{a}, \frac{-b}{a} + 1)$. □

Exemplo 3.3. (a) Observe que $7\lfloor x \rfloor - 2023 = 0$ tem como solução o intervalo $[\frac{2023}{7}, \frac{2023}{7} + 1) = [289, 290)$.

(b) Veja que a equação $2\lfloor x \rfloor - 2023 = 0$ não possui solução, pois $\frac{2023}{2}$ não é um número inteiro. Enquanto $2\lfloor x \rfloor - 2024 = 0$ claramente possui solução.

Corolário 3.4. *A Equação (3.1) tem solução, para $a = 1$, no intervalo semifechado $[-b, -b+1)$.*

Demonstração. É suficiente considerar que $\frac{-b}{1} = -b$ é um número inteiro. □

4 Segundo caso: $n = 2$

Nesta seção será considerada a equação dada por

$$\lfloor x^2 \rfloor + a\lfloor x \rfloor + b = 0 \ , \tag{4.1}$$

com $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Inicialmente, vamos destacar alguns fatos relacionados à equação polinomial de segundo grau, dada por

$$x^2 + ax + b = 0, \tag{4.2}$$

que aqui diremos **associada** à Equação (4.1). Na Equação (4.2) é possível determinar quais são os coeficientes a e b que asseguram a existência de solução real. Isto é feito por meio do estudo do discriminante da Equação (4.2), a saber: $\Delta = a^2 - 4b$.

Para que haja solução real, devemos ter $\Delta \geq 0$, o que nos permite obter a relação $b \leq \frac{a^2}{4}$. Assim, os pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que garantem a existência de solução para a Equação (4.2) são aqueles pontos na parábola e na região abaixo (região destacada), representada na Figura 1.

Por exemplo, a equação polinomial quadrática $x^2 - 5x + 10 = 0$ não possui solução real, visto que $\Delta = (-5)^2 - 40 = -15 < 0$. Enquanto $x^2 - 6x + 9 = 0$ e $x^2 - 5x - 10 = 0$ possuem uma raiz real dupla ($\Delta = 0$) e duas raízes reais distintas ($\Delta = 65 > 0$), respectivamente.

De maneira geral, na Equação (4.2), observa-se que se os coeficientes são tais que $b = \frac{a^2}{4}$, então o conjunto solução é unitário . Já no caso da desigualdade estrita, isto é, $b < \frac{a^2}{4}$, o conjunto solução é composto por dois elementos.

Agora, na Equação (4.1), qual é a relação entre os coeficientes a e b para garantir a existência de solução para a mesma? Na próxima seção iremos responder a essa questão.

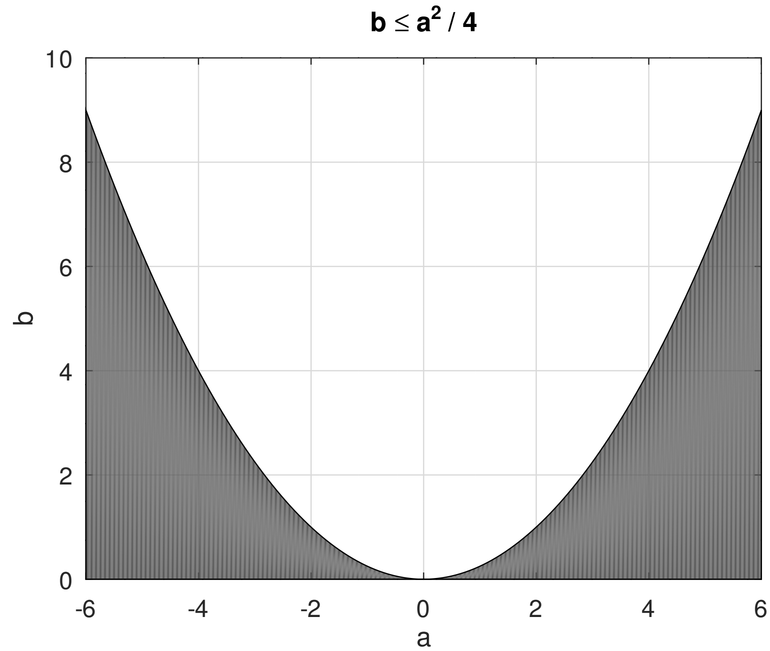

Figura 1: região $b \leq \frac{a^2}{4}$

4.1 Conjunto solução

O Teorema 4.1 à frente descreverá o conjunto solução da Equação (4.1) a partir de uma análise de seus coeficientes.

Suponha que $\bar{x}$ é uma solução da equação $\lfloor x^2 \rfloor + a\lfloor x \rfloor + b = 0$, e seja $\lfloor \bar{x} \rfloor = \bar{k}$, para algum $\bar{k}$ inteiro, isto é, $\bar{x} \in [\bar{k}, \bar{k}+1)$. Então,

$$0 = \lfloor \bar{x}^2 \rfloor + a\lfloor \bar{x} \rfloor + b = \lfloor \bar{x}^2 \rfloor + a\bar{k} + b,$$

ou seja,

$$\lfloor \bar{x}^2 \rfloor = -a\bar{k} - b.$$

Portanto,

$$-(a\bar{k} + b) \leq \bar{x}^2 < -(a\bar{k} + b) + 1.$$

Sendo assim,

$$\sqrt{-(a\bar{k} + b)} \leq |\bar{x}| < \sqrt{-(a\bar{k} + b) + 1},$$

isto é,

$$\sqrt{-(a\bar{k} + b)} \leq \bar{x} < \sqrt{-(a\bar{k} + b) + 1}$$

ou

$$-\sqrt{-(a\bar{k}+b)+1} < \bar{x} \leq -\sqrt{-(a\bar{k}+b)},$$

desde que possamos extrair a raiz quadrada.

Em termos de intervalos, temos

$$\bar{x} \in [\bar{k}, \bar{k}+1)$$

e

$$\bar{x} \in \left[\sqrt{-(a\bar{k}+b)},\, \sqrt{-(a\bar{k}+b)+1}\right) \cup \left(-\sqrt{-(a\bar{k}+b)+1}\,,\, -\sqrt{-(a\bar{k}+b)}\right].$$

Assim, $\bar{x}$ pertence ao conjunto

$$[\bar{k}, \bar{k}+1) \cap \left\{ \left[\sqrt{-(a\bar{k}+b)},\, \sqrt{-(a\bar{k}+b)+1}\right) \cup \left(-\sqrt{-(a\bar{k}+b)+1},\, -\sqrt{-(a\bar{k}+b)}\right] \right\}$$

o qual iremos denotar por $S_{\bar{k}}(a,b)$.

É fácil ver que qualquer $x \in S_{\bar{k}}(a,b)$ é também uma solução da equação considerada e, portanto, temos todo um intervalo como parte do conjunto solução.

Por outro lado, qualquer inteiro k para o qual $S_k(a,b)$ é não vazio também nos conduz a um conjunto de soluções e para cada $x \in S_k(a,b)$ tem-se $\lfloor x \rfloor = k$.

Seja $I = I(a,b) := \{k \in \mathbb{Z} : S_k(a,b) \neq \emptyset\}$. Podemos mostrar que I é um conjunto finito. Portanto, provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Sejam a, b coeficientes reais dados na Equação (4.1) e $k = k(a,b)$ a determinar, tal que $-(ak+b)$ seja um inteiro positivo. Então, o conjunto solução da Equação (4.1) é dado por*

$$S = \cup_{k \in I} S_k(a,b).$$

Observação 4.2. Uma consideração acerca da hipótese do Teorema 4.1 é a exigência de que $-(ak+b)$ seja um inteiro positivo. Tal hipótese se faz necessária para que possamos extrair a raiz quadrada de $-(ak+b)$, bem como a de $-(ak+b)+1$.

O Teorema 4.1 caracteriza o conjunto solução da Equação (4.1) como união disjunta de intervalos. Além disso, traduz o problema de encontrar uma solução x para a Equação (4.1) para o problema de determinar k tal que $S_k(a,b)$ seja não vazio. Esse problema será tratado na próxima seção.

4.2 Determinação dos valores de k

Nesta seção, será apresentado um estudo sobre a determinação do número inteiro $k = k(x) = \lfloor x \rfloor$, em que x é uma solução da Equação (4.1), isto é, k é tal que $S_k(a, b)$ é não vazio. Iremos assumir ao longo da seção que as hipóteses do Teorema 4.1 são satisfeitas.

Com isso, sejam a e b números reais e k um inteiro tais que $S_k(a, b)$ é não vazio. Pela dicotomia dos números reais, temos $k \geq \sqrt{-(ak + b)}$ ou $k \leq \sqrt{-(ak + b)}$. Como $S_k(a, b)$ é não vazio, então a ocorrência de um destes dois casos nos leva a mais dois casos, a saber, $\sqrt{-(ak + b) + 1} \leq k + 1$ ou $k + 1 \leq \sqrt{-(ak + b) + 1}$. Sendo assim, conforme ilustra a Figura 2, temos as seguintes possibilidades para $S_k(a, b)$:

1. $\sqrt{-(ak + b)} \leq k < \sqrt{-(ak + b) + 1} \leq k + 1$,
   neste caso $S_k(a, b) = [k, \sqrt{-(ak + b) + 1})$;

2. $\sqrt{-(ak + b)} \leq k < k + 1 \leq \sqrt{-(ak + b) + 1}$,
   neste caso $S_k(a, b) = [k, k + 1)$;

3. $k \leq \sqrt{-(ak + b)} < \sqrt{-(ak + b) + 1} \leq k + 1$,
   neste caso $S_k(a, b) = \left[\sqrt{-(ak + b)}, \sqrt{-(ak + b) + 1}\right)$;

4. $k \leq \sqrt{-(ak + b)} < k + 1 \leq \sqrt{-(ak + b) + 1}$,
   neste caso $S_k(a, b) = [\sqrt{-(ak + b)}, k + 1)$.

Com isso, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.3. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, o valor máximo para $\#I(a, b)$ é 4.*

A grande questão é: dependendo dos valores de a e b, como determinar os valores de k para os quais $S_k(a, b) \neq \emptyset$? A fim de respondermos a esta questão, apresentamos os seguintes resultados auxiliares, que fornecem condições sobre a e b para que se tenha $S_k(a, b) = \emptyset$.

Lema 4.4. *Sejam a e b coeficientes da Equação (4.1). Se $\frac{a^2}{4} + 1 < b$, então $S_k(a, b) = \emptyset$ para todo k não negativo satisfazendo $-ak - b + 1 \geq 0$.*

Demonstração. De fato, se a e b são tais que $\frac{a^2}{4} + 1 < b$, então

$$\frac{a^2}{4} + 1 < b \implies a^2 + 4 < 4b \implies a^2 + 4 - 4b < 0,$$

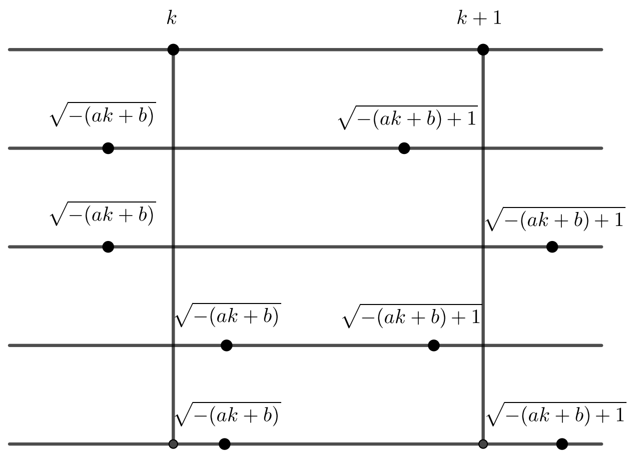

Figura 2: Possibilidades de interseções dos intervalos

ou seja, $a^2 - 4(1)(b-1) < 0$. Mas a expressão do lado esquerdo da desigualdade, $\Delta = a^2 - 4(1)(b-1)$, é exatamente o discriminante da equação $x^2 + ax + b - 1 = 0$. O fato de $\Delta < 0$ nos garante que esta equação não possui solução real, e portanto:

$$x^2 + ax + b - 1 > 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

A inequação (4.3) é equivalente a $x^2 > -ax - b + 1$. Daí, usando que x é não negativo e $-ax - b + 1 \geq 0$, então, extraindo a raiz quadrada, obtemos $x > \sqrt{-ax-b+1}$.

Sendo assim, nestas condições, temos:

$$x + 1 > x > \sqrt{-ax-b+1} > \sqrt{-ax-b}.$$

Caso tenhamos $x = k$ inteiro, concluímos que:

$$[k, k+1) \cap \left[\sqrt{-(ak+b)}, \sqrt{-(ak+b)+1}\right) = \emptyset$$

para todo $k \geq 0$ inteiro com $-ak - b + 1 \geq 0$. Logo, $S_k(a,b) = \emptyset$. □

Lema 4.5. *Sejam a e b coeficientes da Equação (4.1). Se $\frac{(a+2)^2}{4} < b$, então $S_k(a,b) = \emptyset$ para todo $k \leq -1$ satisfazendo $-ak - b + 1 \geq 0$.*

Demonstração. De fato, se a e b são tais que $\frac{(a+2)^2}{4} < b$ então,

$$\frac{(a+2)^2}{4} < b \implies (a+2)^2 < 4b \implies (a+2)^2 - 4b < 0,$$

ou seja, $(a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b < 0$. Mas a expressão do lado esquerdo da desigualdade, $\Delta = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b$, é o discriminante da equação $x^2 + (a+2)x + b = 0$. O fato de Δ ser negativo nos garante que esta equação não possui solução real, e portanto,

$$x^2 + (a+2)x + b > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Da inequação (4.4), obtemos $x^2 + 2x + ax + 1 - 1 + b > 0$, daí

$(x+1)^2 > -ax - b + 1 \implies |x+1| > \sqrt{-ax-b+1}$

Suponha $x+1$ não positivo e $-ax - b + 1 \geq 0$. Então $x + 1 < -\sqrt{-ax-b+1}$. Logo, nestas condições, temos

$$x < x+1 < -\sqrt{-ax-b+1} < -\sqrt{-ax-b}.$$

No caso em que tenhamos $x = k$ inteiro, então:

$$[k, k+1) \cap \left(-\sqrt{-(ak+b)+1}, -\sqrt{-(ak+b)}\right] = \emptyset \ ,$$

para todo $k \leq -1$ inteiro com $-ak - b + 1 \geq 0$, ou seja, $S_k(a,b) = \emptyset$. $\square$

Segue do Lema 4.4 que, para o conjunto dos coeficientes a, b tais que $\frac{a^2}{4} + 1 < b$, a Equação (4.1) não possui solução não negativa. Por outro lado, do Lema 4.5, a mesma equação não possui solução negativa menor ou igual a -1, desde que os coeficientes a, b satisfazem a condição $\frac{(a+2)^2}{4} < b$.

Desta discussão, decorre o seguinte resultado:

Teorema 4.6. *Sejam $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \frac{a^2}{4} + 1 < b\}$ e $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \frac{(a+2)^2}{4} < b\}$. A Equação (4.1) não possui solução em $R_1 \cap R_2$.*

A Figura 3 exemplifica tal situação, em que os coeficientes a e b são tais que $(a,b) \in R_1 \cap R_2$. Nestas condições temos $S_k(a,b) = \emptyset$ para todo k inteiro.

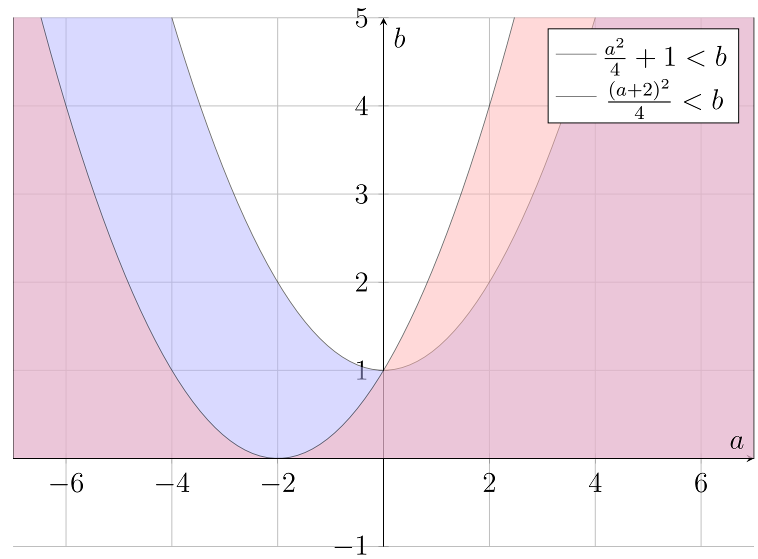

Figura 3: Região no plano ab em que não há solução, $R_1 \cap R_2$.

Por exemplo, quando $a = 0$, qualquer que seja o valor de $b \geq 1$, a equação $\lfloor x^2 \rfloor + b = 0$ não possui solução, enquanto para valores inteiros de $b < 1$ a equação sempre possui solução. Quando $a = -2$, a equação $\lfloor x^2 \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + b = 0$ não tem solução para valores de $b \geq 2$.

Os resultados a seguir nos fornecem uma localização dos valores de k em função do sinal de a. Faremos apenas a demonstração do Lema 4.7, os demais seguem de argumentos análogos.

Lema 4.7. *Sejam a e b inteiros, com $a < 0$, e tais que $\frac{-b}{a} \leq -1$. Sejam $x_1 = x_1(a, b)$ e $x_2 = x_2(a, b)$ tais que $x_1 + 1 = \sqrt{-ax_1 - b}$ e $x_2 = \sqrt{-ax_2 - b + 1}$. Então $S_k(a, b) = \emptyset$ para todo $\frac{-b}{a} \leq k < x_1$ ou $k > x_2$.*

Demonstração. Se existir $\bar{x} \in [-b/a,\, x_1)$ tal que $\bar{x} + 1 \geq \sqrt{-a\bar{x} - b}$, então, por continuidade, deve existir pelo menos um $\bar{x}_1$ tal que $\bar{x}_1 + 1 = \sqrt{-a\bar{x}_1 - b}$. Uma vez que $\frac{-b}{a} < -1$ então, teremos a existência de pelo menos 3 raízes para a equação polinomial quadrática $x^2 + (2 + a)x + b + 1 = 0$, o que é um absurdo. Logo,

$$\sqrt{-ax - b} > x + 1, \quad \forall\ x \in \left[\frac{-b}{a}, x_1\right).$$

Portanto, qualquer que seja k inteiro em $[-b/a,\, x_1)$, segue

$$\sqrt{-ak-b+1} > \sqrt{-ak-b} > k+1 > k,$$

o que implica $S_k(a,b) = \emptyset$.

Com argumento análogo, podemos mostrar que para todo $x > x_2$, vale $\sqrt{-ax-b+1} < x$. Logo,

$$\sqrt{-ax-b} < \sqrt{-ax-b+1} < x < x+1, \quad \forall\ x > x_2.$$

Portanto, qualquer que seja $k > x_2$ inteiro, vale

$$\sqrt{-ak-b} < \sqrt{-ak-b+1} < k < k+1,$$

o que acarreta em $S_k(a,b) = \emptyset$. $\square$

Veja a Figura 4.

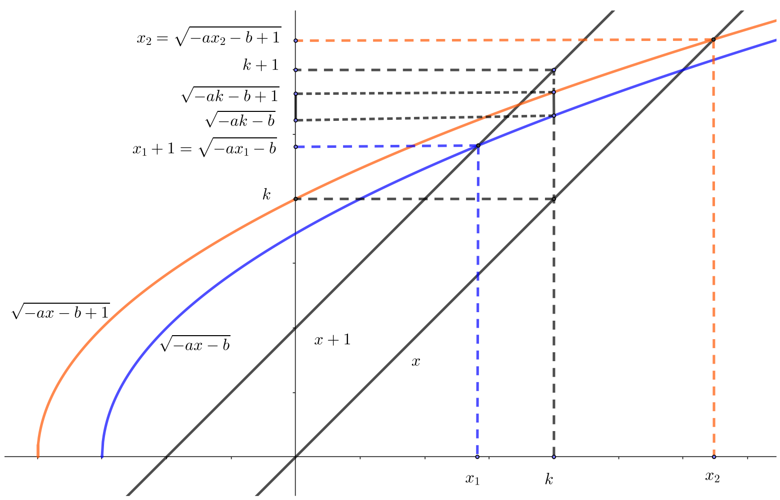

Figura 4: Ilustração com $a < 0$: $S_k(a,b) = [\sqrt{-ak-b}, \sqrt{-ak-b+1})$.

Lema 4.8. *Sejam a e b inteiros, com $a < 0$, e tais que $\frac{-b}{a} \leq -1$. Sejam $x_3 = x_3(a,b)$ e $x_4 = x_4(a,b)$ tais que $x_3+1 = -\sqrt{-ax_3 - b + 1}$ e $x_4 = -\sqrt{-ax_4 - b}$. Então $S_k(a,b) = \emptyset$ para todo $\frac{1-b}{a} \leq k \leq x_3$ ou $x_4 \leq k \leq 0$.*

Veja Figura 5.

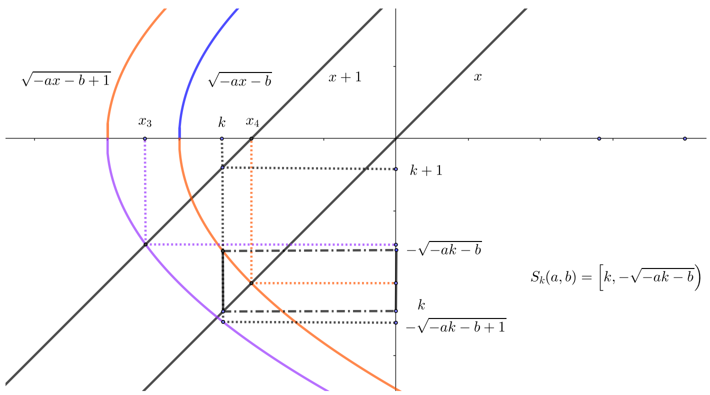

Figura 5: Ilustração com $a < 0$: e $S_k(a,b) = [k, -\sqrt{-ax_3 - b})$

Como consequência direta dos Lemas 4.7 e 4.8, temos:

Teorema 4.9. *Sejam a e b inteiros, com $a < 0$, e tais que $\frac{-b}{a} \leq -1$. Então, uma condição necessária e suficiente para que se tenha $S_k(a,b) \neq \emptyset$ é $x_1 < k < x_2$ ou $x_3 < k < x_4$, em que k é um inteiro.*

Lema 4.10. *Sejam a e b inteiros, com $a > 0$, e tais que $\frac{-b}{a} \geq 1$. Sejam $x_1 = x_1(a,b)$ e $x_2 = x_2(a,b)$ tais que $x_1 + 1 = \sqrt{-ax_1 - b}$ e $x_2 = \sqrt{-ax_2 - b + 1}$. Então, $S_k(a,b) = \emptyset$ para todo $0 \leq k \leq x_1$ ou $k \geq x_2$.*

Lema 4.11. *Sejam a e b inteiros, com $a > 0$, e tais que $-b/a \geq 1$. Sejam $x_3 = x_3(a,b)$ e $x_4 = x_4(a,b)$ tais que $x_3 + 1 = -\sqrt{-ax_3 - b + 1}$ e $x_4 = -\sqrt{-ax_4 - b}$. Então, $S_k(a,b) = \emptyset$ para todo $k \leq x_3$ ou $x_4 \leq k \leq 0$.*

Como consequência direta dos Lemas 4.10 e 4.11, temos:

Teorema 4.12. *Sejam a e b inteiros, com $a > 0$, e tais que $\frac{-b}{a} \geq 1$. Então, uma condição necessária e suficiente para que se tenha $S_k(a,b) \neq \emptyset$ é $x_1 < k < x_2$ ou $x_3 < k < x_4$, em que k é um inteiro.*

Os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 são obtidos por meio da resolução das equações que eles satisfazem e do fato de x_1 e x_2 serem positivos, enquanto x_3 e x_4 são negativos. São elas:

$$x_1(a,b) = \frac{-(2+a) + \sqrt{(2+a)^2 - 4(b+1)}}{2},$$
$$x_2(a,b) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(b-1)}}{2},$$
$$x_3(a,b) = \frac{-(2+a) - \sqrt{(2+a)^2 - 4b}}{2},$$
$$x_4(a,b) = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Com isso, localizamos os valores de k, caso eles existam. A saber, $k \in \mathbb{Z} \cap (x_1,\, x_2)$ ou $k \in \mathbb{Z} \cap (x_3,\, x_4)$.

4.3 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de como aplicação direta da teoria desenvolvida acima.

Exemplo 4.13. Considere a equação $\lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor + 4 = 0$.

Note que os valores $a = -3$ e $b = 4$, são tais que $\frac{a^2}{4} + 1 < b$ e $\frac{(2+a)^2}{4} < b$. De fato, $\frac{(-3)^2}{4} + 1 = \frac{13}{4} < 4$ e $\frac{(2+(-3))^2}{4} = \frac{1}{4} < 4$, portanto $(-3, 4) \in R_1 \cap R_2$, e, consequentemente, a equação não possui solução, conforme o Teorema 4.6. A Figura 6 exibe o gráfico da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor + 4$, e como pode ser visto, a mesma não possui zeros.

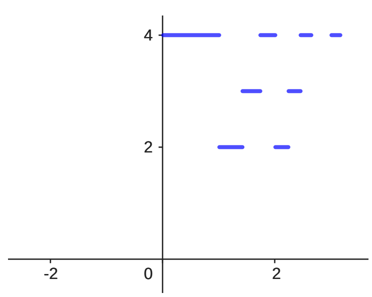

Figura 6: Zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor + 4$

Exemplo 4.14. Queremos resolver a equação $\lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor - 2 = 0$.

Veja que $(-3, -2)$ é admissível. Veja também que $(1-(-2))/(-3) = -1$. Assim, podemos encontrar os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4:

$$x_1(-3,-2) = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4(-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6,$$
$$x_2(-3,-2) = \frac{-(-3)+\sqrt{(-3)^2-4(-2-1)}}{2} = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \approx 3,8,$$
$$x_3(-3,-2) = \frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1,$$
$$x_4(-3,-2) = \frac{-(-3)-\sqrt{(-3)^2-4(-2)}}{2} = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \approx -0,56.$$

Logo, pelo Corolário 4.9, estamos interessados em $\mathbb{Z} \cap (x_1, x_2) = \{2, 3\}$ e $\mathbb{Z} \cap (x_3, x_4) = \emptyset$. Ou seja, no contexto da discussão acima do Teorema 4.1, segue que $I(-3, -2) = \{2, 3\}$. Com isso, temos:

- $S_2(-3,-2) = [2,\, 3) \cap \left[\sqrt{-(-3)2-(-2)},\, \sqrt{-(-3)2-(-2)+1}\right) =$
  $[2,\, 3) \cap [\sqrt{8}, 3) = [\sqrt{8}, 3)$
- $S_3(-3,-2) = [3,\, 4) \cap \left[\sqrt{-(-3)3-(-2)},\, \sqrt{-(-3)3-(-2)+1}\right) =$
  $[2,\, 3) \cap [\sqrt{11}, \sqrt{12}) = [\sqrt{11}, \sqrt{12})$.

Portanto, conforme o Teorema 4.1, o conjunto solução da equação $\lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor - 2 = 0$ é dada pelo conjunto $S = \cup_{k \in I(-3,\,-2)} S_k(-3,\,-2) = [\sqrt{8}, 3) \cup [\sqrt{11}, \sqrt{12})$, como pode ser visto na Figura 7.

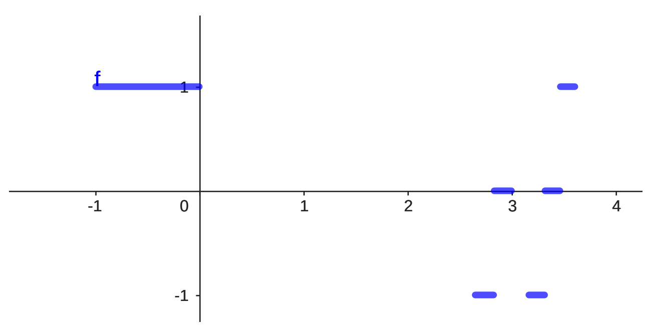

Figura 7: Zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 3\lfloor x \rfloor - 2$

Exemplo 4.15. Determinar os zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor - 3$.

Note que o par $(2, -3)$ é admissível.

$$x_1(2,-3) = \frac{-(2+2) + \sqrt{(2+2)^2 - 4(-3+1)}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{6}}{2} \approx 0,45,$$
$$x_2(2,-3) = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(-3-1)}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} \approx 1,2,$$
$$x_3(2,-3) = \frac{-(2+2) - \sqrt{(2+2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{2} \approx -4,6,$$
$$x_4(2,-3) = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = -3.$$

Assim, $\mathbb{Z} \cap (x_1, x_2) = \{1\}$ e $\mathbb{Z} \cap (x_3, x_4) = \{-4\}$, ou seja, $k \in \{-4,\ 1\} = I(2,\ -3)$.

- $S_{-4}(2,-3) = [-4,\ -3) \cap \big(-\sqrt{-(-4)2-(-3)+1}\,,\ -\sqrt{-(-4)2-(-3)}\big] = [-4,\ -3) \cap \big(-\sqrt{12}\,, -\sqrt{11}\big] = \big(-\sqrt{12}\,, -\sqrt{11}\big]$.
- $S_1(2,-3) = [1,\ 2) \cap \big[\sqrt{-(2)1-(-3)},\ \sqrt{-(2)1-(-3)+1}\big) = [1,\ 2) \cap \big[1,\ \sqrt{2}\big) = \big[1,\ \sqrt{2}\big)$.

Logo, conforme o Teorema 4.1, o conjunto dos zeros da função $f(x)$ é:

$$S = \cup_{k \in I(2,-3)} S_k(2,-3) = \big(-\sqrt{12}\,, -\sqrt{11}\,\big] \cup \big[1,\ \sqrt{2}\big).$$

Veja a Figura 8.

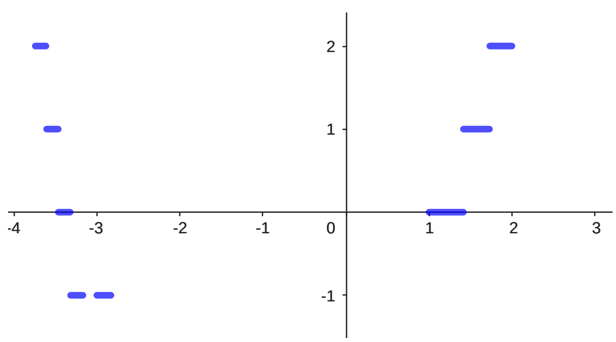

Figura 8: Zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor - 3$

As hipóteses sobre a e b nesta seção foram necessárias para assegurar a existência dos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4. Na próxima seção, iremos tratar da determinação dos valores de k em cenários onde um ou mais desses valores não existem.

5 Outros exemplos

Nesta seção, discutiremos alguns exemplos nos quais pelo menos um dos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 não existem no sentido dos números reais. Além disso, as hipóteses sobre os números $\frac{1-b}{a}$ e $\frac{-b}{a}$ nos teoremas da seção anterior não são satisfeitas; no entanto, as soluções são obtidas de maneira semelhante.

Exemplo 5.1. Considere a equação $\lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor + 2 = 0$. Veja que $(2, 2)$ é admissível. Note que $\frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$x_1(2,2) = \frac{-(2+2) + \sqrt{(2+2)^2 - 4(3)}}{2} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2} = -1,$$

$$\begin{aligned} x_2(2,2) &= \frac{-2+\sqrt{2^2-4(2-1)}}{2} = \frac{-2+\sqrt{0}}{2} = -1, \\ x_3(2,2) &= \frac{-(2+2)-\sqrt{(2+2)^2-4(2)}}{2} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2} \approx -3,41, \\ x_4(2,2) &= \frac{-2-\sqrt{2^2-4(2)}}{2} = \frac{-2-\sqrt{-4}}{2}. \end{aligned}$$

Note que $x_4(2, 2)$ não é um número real. Isto significa que não há interseção entre os gráficos das funções x e $-\sqrt{-ax-b}$. Por outro lado, como pode ser verificado pelo leitor, $k \in \mathbb{Z} \cap (x_3, \frac{1-b}{a})$, isto é, $k \in \mathbb{Z} \cap (-3,41\ ,\ -\frac{1}{2}) = \{-3,\ -2,\ -1\} = I(2, 2)$.

- $S_{-3}(2,2) = (-3,-2] \cap (-\sqrt{-2(-3)-2+1}, -\sqrt{-2(-3)-2}] =$ $[-3,-2) \cap (-\sqrt{5}, -\sqrt{4}] = (-\sqrt{5}, -2)$.
- $S_{-2}(2,2) = [-2,-1) \cap (-\sqrt{-2(-2)-2+1}, -\sqrt{-2(-2)-2}] =$ $[-2,-1) \cap (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.
- $S_{-1}(2,2) = [-1,0) \cap (-\sqrt{-2(-1)-2+1}, -\sqrt{-2(-1)-2}] =$ $[-1,0) \cap (-\sqrt{1}, -\sqrt{0}] = (-1,0)$.

Portanto, a solução da equação $\lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor + 2 = 0$ é dada pelo conjunto

$$S = \cup_{k\in I(2,2)} S_k(2,2) = (-\sqrt{5}, -2) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (-1, 0).$$

Veja a Figura 9.

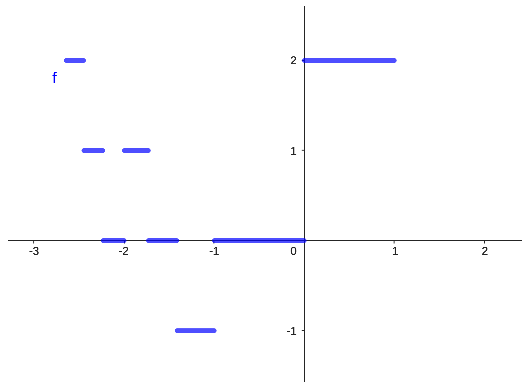

Figura 9: Zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor + 2$

Exemplo 5.2. Agora, considere a equação $\lfloor x^2 \rfloor - 5\lfloor x \rfloor + 2 = 0$.

Neste caso, $\frac{1-b}{a} = \frac{1-2}{-5} = \frac{1}{5}$.

$$x_1(-5,2) = \frac{-(2+(-5)) + \sqrt{(2+(-5))^2 - 4(2+1)}}{2} = \frac{3+\sqrt{-3}}{2},$$
$$x_2(-5,2) = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4(2-1)}}{2} = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4,8,$$
$$x_3(-5,2) = \frac{-(2+(-5)) - \sqrt{(2+(-5))^2 - 4 \times 2}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,$$
$$x_4(-5,2) = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2}}{2} = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0,44.$$

Note que x_1 não é um número real. O leitor pode verificar que, neste caso, $I(-5,2) = \mathbb{Z} \cap (\frac{1-b}{a}, x_2) = \mathbb{Z} \cap (\frac{1}{5}, \frac{5+\sqrt{21}}{2})$, isto é, $I(-5,2) = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $S_1(-5,2) = [1,2) \cap \left[\sqrt{-(-5) \times 1 - 2}, \sqrt{-(-5) \times 1 - 2 + 1}\right) = [1,2) \cap [\sqrt{3}, \sqrt{4}) = [1,2) \cap [\sqrt{3}, 2) = [\sqrt{3}, 2)$,

- $S_2(-5,2) = [2,3) \cap \left[\sqrt{-(-5) \times 2 - 2}, \sqrt{-(-5) \times 2 - 2 + 1}\right) = [2,3) \cap [\sqrt{8}, \sqrt{9}) = [2,3) \cap [\sqrt{8}, 3) = [\sqrt{8}, 3)$,

- $S_3(-5,2) = [3,4) \cap \left[\sqrt{-(-5) \times 3 - 2}, \sqrt{-(-5) \times 3 - 2 + 1}\right) = [3,4) \cap [\sqrt{13}, \sqrt{14}) = [\sqrt{13}, \sqrt{14})$,

- $S_4(-5,2) = [4,5) \cap \left[\sqrt{-(-5)\times 4 - 2}, \sqrt{-(-5)\times 4 - 2 + 1}\right) =$ $[4,5) \cap [\sqrt{18}, \sqrt{19}) = [\sqrt{18}, \sqrt{19})$.

Portanto, o conjunto solução da equação $\lfloor x^2 \rfloor - 5\lfloor x \rfloor + 2 = 0$ é dado por,

$$S = [\sqrt{3}, 2) \cup [\sqrt{8}, 3) \cup [\sqrt{13}, \sqrt{14}) \cup [\sqrt{18}, \sqrt{19}).$$

Veja a Figura 10.

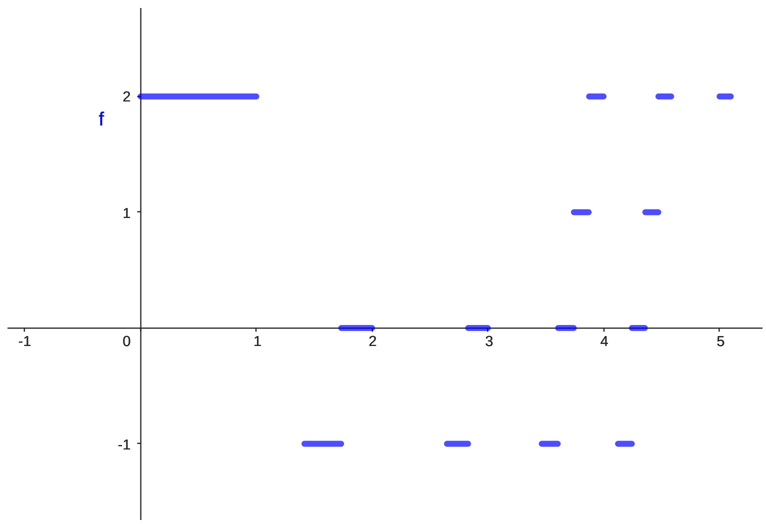

Figura 10: Zeros da função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 5\lfloor x \rfloor + 2$

6 Problemas motivadores

A seguir, deixamos alguns problemas para leitor interessado.

Problema 1. Verifique se as soluções para a equação $\lfloor x^2 \rfloor + a\lfloor x \rfloor + b = 0$ que são da forma $S_k = [k, k+1)$ ocorrem somente para $k = -1$ e $k = 0$, isto é, são apenas os intervalos $[-1, 0)$ e/ou $[0, 1)$.

Problema 2. Estude a existência de soluções, a partir do sinal de a, considerando a hipótese $-1 < \frac{-b}{a} < 1$.

Problema 3. Estude a existência de soluções com $a > 0$, considerando a hipótese $\frac{-b}{a} < -1$.

Problema 4. Estude a existência de soluções com $a < 0$, considerando a hipótese $\frac{-b}{a} > -1$.

7 Considerações

O estudo dos zeros da função piso mostrou-se relativamente simples para o caso $n = 1$. Já para o caso $n = 2$, ou seja, $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + a\lfloor x \rfloor + b$, uma análise mais detalhada foi realizada, mostrando que os zeros da função, quando existem, correspondem à união de intervalos da reta. Condições de não existência de soluções também foram exibidas, assim como condições necessárias e suficientes para existência de soluções.

O conjunto dos coeficiente a e b que obtemos neste trabalho é um subconjunto de $\mathbb{Z}^2$. Para conjuntos mais gerais, como subconjuntos de $\mathbb{Q}^2$, nosso método não se aplica, uma vez que a equação $\lfloor x^2 \rfloor - (5/7)\lfloor x \rfloor - 11/10 = 0$ não possui solução, mesmo com o par $(-5/7\,, 11/10)$ satisfazendo as condições de existência. Dito isto, para futuros trabalhos, pode ser investigado as relações existentes entre a e b em $\mathbb{Q}$, para que a função $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + a\lfloor x \rfloor + b$ possua zeros.

Agradecimento: Agradecemos ao *referee ad hoc* e ao editor por sugerirem alterações que muito melhoraram o texto.

O terceiro autor foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.

Referências

[1] Boyer, Carl B. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.

[2] Carvalho, Paulo C. P.; Morgado, Augusto C.. *Matemática discreta*. Coleção PROFMAT-SBM. Rio de Janeiro, 2015.

[3] Carvalho, João B. P.; Roque, Tatiana. *Tópicos de história da matemática*. Coleção PROFMAT-SBM. Rio de Janeiro, 2014.

[4] Esquef, Rosa M. A. Modelando situações do nosso dia a dia usando funções teto e piso. Revista do Professor de Matemática, v. 78, 2012.

[5] Hefez, Abramo. *Aritmética*, Coleção PROFMAT-SBM, 1a edição. Rio de Janeiro, 2013.

[6] Knudsen, Carlos A. A teoria das equações algébricas. Revista do Professor de Matemática, v. 7, 1985.

[7] Lima, Elon L. A Equação do terceiro grau. Revista Matemática Universitária, No.5, 1987.

[8] Milies, Francisco C. P. Solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. Revista do Professor de Matemática, n. 25, p. 15-22, 1994.

[9] Muniz Neto, Antonio C. *Fundamentos de cálculo*. Coleção PROFMAT-SBM. Rio de Janeiro, 2015.

[10] Yamaoka, Luís C. Os caminhos das raízes da função quadrática. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 23, n. 2, p. 36–61, 2023.

[11] Matsko, Vincent J. Quadratics and the Floor Function. Mathematics Magazine, vol. 93, no. 2, 2020, pp. 104–112.

[12] Sun, E.; Modgil, V. .; Yuan, K. Complex roots of quadratics with the floor function. Journal of Student Research, v. 11, no 3, 2022.

Recebido em 08 de Abril de 2024.
Revisado em 21 de Agosto 2024.
Aceito em 14 Outubro 2024.