Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v9i4.20013

CONCEPÇÕES FILOSÓFICAS DO LOGICISMO, INTUICIONISMO E FORMALISMO COMO ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE

PHILOSOPHICAL CONCEPTIONS OF LOGICISM, INTUITIONISM, AND FORMALISM AS APPROACHES TO THE CONCEPT OF LIMIT

Geslane Figueiredo da Silva Santana
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT
geslanef@hotmail.com

Mônica Suelen Ferreira de Moraes
Universidade Federal do Tocantins – UFT
monicamoraes@uft.edu.br

Thiago Beirigo Lopes
Instituto Federal de Mato Grosso – IFMT
thiago.lopes@ifmt.edu.br

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Pará – UFPA
iamendes1@gmail.com

Resumo

O logicismo, intuicionismo e formalismo são dimensões da transposição do pensamento para o texto e estão presentes em estudos na Matemática. Nesta pesquisa, buscou-se analisar e comparar como as concepções filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo interpretam e aplicam o conceito de limite na Matemática. Para tanto, foram escolhidas e analisadas as obras de Caraça (1951), *Conceitos fundamentais da Matemática*, de Costa (1981), *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios*, e de Guénon (1946), *Los principios del cálculo infinitesimal*. Para identificação das pistas para realização da análise, tomou-se as definições de Logicismo, Intuicionismo e Formalismo a partir de Abbagnano (2007) e Ponte *et al* (2000). Percebe-se que Guénon (1946) aborda a noção de limite numa perspectiva intuicionista, assim como Caraça (1951) e Costa (1981); no entanto, estes últimos apresentam também alguns aspectos do Formalismo e Logicismo.
Palavras-chave: Filosofia da Matemática. Conceito de Limite. Logicismo. Intuicionismo. Formalismo.

Abstract

Logicism, intuitionism, and formalism are dimensions of the transposition of thought into text and are present in mathematical studies. This research aimed to analyze and compare how the philosophical conceptions of logicism, intuitionism, and formalism interpret and apply the concept of limit in mathematics. For this purpose, the works of Caraça (1951), “Conceitos fundamentais da

Matemática", Costa (1981), "As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios", and Guénon (1946), "Los principios del cálculo infinitesimal", were chosen and analyzed. To identify clues for analysis, definitions of Logicism, Intuitionism, and Formalism were taken from Abbagnano (2007) and Ponte *et al* (2000). It is noted that Guénon (1946) approaches the notion of limit from an intuitionist perspective, as do Caraça (1951) and Costa (1981); however, the latter also present some aspects of Formalism and Logicism.
Keywords: Philosophy of Mathematics. Concept of Limit. Logicism. Intuitionism. Formalism.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Uma abordagem de conteúdo matemático embasada em referenciais epistemológicos ou didático-pedagógicos de conceitos matemáticos pode possibilitar a ampliação dos conhecimentos que os indivíduos já possuem sobre tais conceitos. Ao longo da história, emergiram diversas perspectivas de compreensão acerca da origem e do modelo do conhecimento matemático. Esse desenvolvimento converge com o que é proposto pela filosofia que, de acordo com Japiassú (2001), é o estabelecimento dos fundamentos que possibilitam a existência do próprio saber.

Nesse cenário, existia a intenção de estruturar o saber matemático e, nesse sentido, três correntes filosóficas ganharam proeminência no início do século XX: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo (Mutti *et al.*, 2019). Assim, o logicismo, intuicionismo e formalismo se constituem em dimensões da transposição do pensamento científico para a apresentação textual, que estão frequentemente presentes em estudos matemáticos. Cabe destacar que essas abordagens não necessariamente precisam estar disjuntas, pois há possibilidade de produção textual alicerçada em mais de uma dessas dimensões.

Diante disso, neste artigo busca-se analisar e comparar como as concepções filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo interpretam e aplicam o conceito de limite na Matemática. Para isso, optou-se por analisar as obras de Caraça (1951), *Conceitos fundamentais da Matemática*, de Costa (1981), *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios*, e de Guénon (1946), *Los principios del cálculo infinitesimal*, seguindo técnicas de pesquisa da análise documental posto pela análise de conteúdo, que busca sentido ainda não observado em documentos (Bardin, 2016). Para identificar as direções para a análise, foram tomadas as definições de logicismo, intuicionismo e formalismo principalmente a partir de Abbagnano (2007) e Ponte *et al.* (2000).

CORRENTES FILOSÓFICAS: LOGICISMO, INTUICIONISMO E FORMALISMO

Uma Introdução Concisa ao Logicismo na Matemática

O logicismo, uma corrente filosófica na Filosofia da Matemática, destaca-se por seu objetivo fundamental de restringir a Matemática ao domínio da lógica. Uma perspectiva pioneira nesse movimento foi apresentada por Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 -1925), renomado matemático alemão, através de sua obra *Begriffsschrift* em 1879. Este trabalho inaugural propunha a redução da aritmética à lógica, alimentando a convicção de que, ao alcançar esse intento, toda a estrutura da Matemática clássica poderia ser sintetizada sob o guarda-chuva da lógica. Conforme Abbagnano (2007, p. 630);

> Os pensadores dessa corrente sustentam que a Matemática (pura) é um ramo da lógica, ou seja, que todas as proposições das Matemáticas puras (particularmente da aritmética, portanto da análise) só podem ser enunciadas com o vocabulário e a sintaxe da lógica Matemática, que assim se torna a disciplina Matemática por excelência. Com esta convicção, Dedekind, Frege e Russell realizaram suas famosas análises do conceito de número (inteiro), exatamente para defini-lo apenas através de noções (símbolos) da lógica Matemática.

A centralização na análise do conceito de número, conforme demonstrado por Richard Dedekind (1831-1916), Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russell (1872-1970), denota uma tentativa de estabelecer fundamentos para a aritmética e a análise mediante uma abordagem exclusivamente lógica. Essa abordagem implica que tais pensadores almejam a definição do conceito de número inteiro exclusivamente por meio de conceitos e símbolos inerentes à lógica Matemática, visando a construção de uma base lógica robusta para a Matemática.

Neste âmbito, as discussões e controvérsias são extremamente importantes, pois auxiliam o professor a compreender os caminhos e problemas envoltos na própria Matemática. No parágrafo intitulado "O número é algo subjetivo?", referente à descrição subjetiva, em que o número é tido como uma criação do espírito humano, Frege (1980, § 26) afirma que:

> Uma tal descrição dos processos internos que precedem à formulação do juízo numérico, ainda que correta, nunca poderá substituir uma determinação genuína de conceito. Nunca se poderá recorrer a ela para a

> demonstração de uma proposição aritmética; por meio dela não aprendemos nenhuma propriedade dos números. Pois o número não é mais um objeto da psicologia, ou um resultado de processos psíquicos [...].

O autor destaca que os números não devem ser considerados simples objetos da psicologia ou resultados de processos mentais. Essa visão reflete a preocupação de que uma abordagem meramente psicológica não atinge a essência dos conceitos matemáticos e não oferece os fundamentos necessários para a prova e compreensão das proposições aritméticas.

Abbagnano (2007) pontua que os adeptos dessa perspectiva sustentam a visão de que a Matemática, em sua essência pura, constitui-se como um desdobramento da Lógica. Sob essa ótica, todas as proposições Matemáticas são passíveis de expressão exclusivamente por meio da linguagem da lógica Matemática. O autor destaca que, embasados nessa convicção, pensadores como Frege e Russell empreenderam análises aprofundadas do conceito de número inteiro, buscando definições que se restringissem unicamente à linguagem da lógica Matemática.

De acordo com Ferreira (2014), o logicismo é conceituado como uma tese que estabelece que as verdades Matemáticas são, em última instância, verdades lógicas expressas por meio de uma linguagem circunscrita aos domínios da lógica. O cerne do logicismo, conforme apontado por Ponte *et al*. (2000), residia na tentativa de estabelecer que a Matemática clássica mantém uma conexão intrínseca com a lógica. Nesse contexto, Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947) empreenderam, em 1910, a publicação da obra *Principia Mathematica*. Apesar de se poder considerar esse trabalho como uma teoria formal de conjuntos, é salutar observar que a formalização ainda se encontrava em um estágio de conclusão.

Nessa obra, foi planejado elucidar que todos seus axiomas eram pertencentes à lógica e, caso houvesse êxito, os fundamentos matemáticos seriam axiomas da lógica. Entretanto, de acordo com Ponte *et al*. (2000), existiam axiomas que não eram proposições lógicas que convergiam ao logicismo e, assim, este projeto – embora sua importância fosse reconhecida para o desenvolvimento da lógica Matemática – não obteve êxito diante de sua finalidade.

Em 1919, Russell publica a *Introduction to Mathematical Philosophy* e afirma que: "É agora impossível separar a Lógica da Matemática. Elas diferem apenas como um rapaz de um homem: a Lógica é a juventude da Matemática, e a Matemática é a maioridade da Lógica" (2006, p. 191). A metáfora sugere essa visão de continuidade e interconexão entre Lógica e Matemática, destacando que, embora possam ser distintas em certos aspectos, são inseparáveis e se complementam.

O logicismo, introduzido por Frege, Dedekind e Russell, redefiniu a Matemática sob a égide da lógica. Ao concentrar-se na análise do conceito de número, buscando definições lógicas, essa abordagem influenciou profundamente a Filosofia da Matemática. Apesar de desafiadora, a visão de Russell sobre a inseparabilidade entre Lógica e Matemática ressoa como um legado duradouro, moldando a compreensão contemporânea dessa interconexão fundamental.

O Intuicionismo na Reflexão sobre os Fundamentos Matemáticos

A corrente Matemática conhecida como intuicionismo, considerada a forma mais proeminente de construtivismo, emerge da ideia fundamental de que a construção da Matemática abstrata pode ser compreendida como essencialmente intuitiva, desvinculada das estruturas lógicas convencionais. Iniciado por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), e inspirado nas concepções de Leopold Kronecker (1823-1891), esse movimento matemático reflete as perspectivas de Kronecker ao sustentar que o conceito de número natural é inerente à intuição humana, atribuindo a Deus a criação dos números naturais e aos humanos a invenção dos demais (Abbagnano, 2007).

De acordo com Meneghetti (2001, p. 8), "[...] toda Matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais por meio de métodos construtivos 'intuitivamente claros', ou seja, as ideias básicas encontram-se na intuição". Ainda conforme a autora, a linguagem e simbologia lógica não são instrumentos matemáticos, mas meios de comunicação do pensamento matemático e, assim, deixam de ser a base da Matemática.

Colaborando com esse pensamento, Ponte *et al.* (2000) ressaltam que o intuicionismo destaca a ideia de que a Matemática é uma ciência que tem a sua gênese no domínio do pensamento abstrato, e é nele que ela se desenvolve. Desse modo, acreditava-se que a verbalização constitui uma estrutura insuficiente para comunicar as ideias Matemáticas criadas pelo pensamento abstrato. Nesse contexto, o intuicionismo restringe o conhecimento matemático ao conhecimento subjetivo. Nessa abordagem:

> Matemática é uma ciência que tem a sua origem no espírito e aí se exerce: a Matemática não possui nenhuma existência fora do espírito humano. As palavras e relações verbais constituem uma estrutura imperfeita para comunicar as ideias Matemáticas que são criadas pela atividade do espírito (Ponte *et al*., 2000, p. 17).

A ênfase recai sobre a atividade mental como a fonte primária das ideias Matemáticas, considerando que a Matemática não tem uma existência independente fora do pensamento humano. Indica a crença de que a linguagem pode ser limitada na expressão precisa das abstrações Matemáticas, enfatizando a importância da intuição e da atividade mental direta na compreensão Matemática.

A existência de objetos matemáticos é determinada pela capacidade de construção, permitindo apenas a existência de entes matemáticos que possam ser efetivamente construídos. Abbagnano (2007, p. 583) elenca as seguintes teses de Brouwer:

> 1) A existência dos objetos matemáticos é definida pela sua possibilidade de construção, por isso, só "existem" entes matemáticos que possam ser construídos;
> 2) O princípio do terceiro excluído não é válido para proposições em que haja referência a grandezas infinitas; e
> 3) As definições impredicativas não são válidas.

Devido aos princípios de raciocínio admitidos pelos intuicionistas, estes tiveram que rejeitar vários dos teoremas da Matemática clássica. Além disso, não obtiveram êxito na tentativa de constituir fundamentos consistentes, chegando a questionar a validade de certos resultados matemáticos que contrariavam seus princípios intuitivos. Ponte *et al*. (2000) mencionam que os intuicionistas, ao apresentarem provas para certos teoremas, foram criticados por matemáticos não intuicionistas, que consideraram essas provas mais longas e menos elegantes do que aquelas elaboradas por métodos não construtivistas.

Em contraste com os princípios da Matemática clássica, o intuicionismo enfrentou ampla rejeição por parte da comunidade Matemática (Meneghetti, 2001). Ponte *et al*. (2000, p. 18) ressaltam que, na época, esse "programa intuicionista" foi amplamente considerado como pouco razoável e até mesmo fanático pela comunidade Matemática.

O intuicionismo, ao sublinhar a importância da intuição como base Matemática, desafiou concepções estabelecidas, provocando uma reavaliação da relação entre o pensamento abstrato e a linguagem Matemática. A valorização da atividade mental direta e a crítica a princípios da Matemática clássica evidenciam a busca por fundamentos mais sólidos. As teses de Brouwer, como a existência apenas de objetos matemáticos construíveis, marcaram uma abordagem construtivista e crítica à abstração excessiva. Apesar de enfrentar resistência, o intuicionismo influenciou debates importantes sobre os fundamentos matemáticos e sua ligação com a intuição humana, deixando uma marca duradoura nas discussões do século XX.

Formalismo Matemático: Fundamentos e Desafios em Síntese

A corrente formalista, inaugurada aproximadamente em 1910 por David Hilbert (1862-1943), delineou como principal meta desenvolver uma técnica Matemática capaz de demonstrar de maneira definitiva a consistência da Matemática, assegurando que esta estivesse isenta de contradições. A iniciativa de Hilbert visava construir uma prova da consistência da Matemática clássica, valendo-se exclusivamente de argumentos finitos, na tentativa de apresentar uma fundamentação que não fosse passível de rejeição por parte de Brouwer.

No que concerne à segunda tese apresentada na seção anterior, Abbagnano (2007, p. 583) destaca que a "[...] rejeição do princípio do terceiro excluído implica a rejeição da dupla negação, portanto do método da prova indireta". Contudo, conforme enfatizado pelo autor, esse método constitui a base do formalismo na Matemática. Nesse contexto, a concepção formalista postula que, para estabelecer uma entidade Matemática, é suficiente garantir que ela não envolva contradições. Em termos mais precisos, Japiassu (2001, p. 1) indica que, para os formalistas, "[...] as verdades Matemáticas são puramente formais, repousando unicamente num jogo de convenções e de símbolos".

O objetivo primordial do formalismo era a formalização das teorias Matemáticas. Assim, buscava-se uma abordagem eminentemente sintética, recorrendo a algoritmos e à adoção de uma linguagem formal para investigar a consistência no pensamento matemático.

Ponte *et al.* (2000) resumem que a meta de Hilbert consistia em encontrar uma ferramenta Matemática capaz de demonstrar de maneira irrefutável a ausência de contradições na Matemática.

A proposta de Hilbert era integrar o método logicista ao método axiomático. Ele via o formalismo não apenas como uma defesa desse método, mas também como um meio de assegurar a consistência nas investigações Matemáticas. Acreditava que, ao analisar processos e conceitos matemáticos e representá-los através de um simbolismo apropriado, como a lógica simbólica, seria possível demonstrar que, a partir de fórmulas fundamentais e regras apoiadas na manipulação de símbolos, nunca se chegaria a uma fórmula que resultasse em contradição. Hilbert concebia que as coisas existem contanto que novos conceitos e entidades possam ser definidos sem contradição (Heijenoort, 1971, p. 479).

Em 1920, Hilbert lançou o *Programa de Hilbert*, fundamentado em princípios que visavam tornar a Matemática mais lógica, afastando-se de tarefas baseadas em regras postuladas de maneira arbitrária. Beaney (2006, p. 64) explica que a "[...] concepção de axiomatização de Hilbert e a ideia, em particular, de que os axiomas podem codificar uma estrutura formal de conceitos podem então ser interpretadas de diferentes maneiras." (tradução nossa). Em 1905, no curso teórico "Os Princípios Lógicos do Pensamento Matemático", Hilbert (*apud* Ferreirós; Gray, 2006, p. 3) afirma:

> O edifício da ciência não se ergue como uma habitação, na qual os alicerces são primeiro firmemente assentados e só depois se procede à construção e ampliação das salas. A ciência prefere assegurar o mais rapidamente possível espaços confortáveis para vaguear e só depois, quando aparecem sinais de que as fundações frágeis não são capazes de sustentar a expansão das salas, ela se propõe a apoiá-las e fortalecê-las. Este não é um ponto fraco, mas sim o caminho certo e saudável do desenvolvimento (tradução nossa).

Nesse contexto, Hilbert (*apud* Reid, 1970, p. 264, tradução nossa) ressalta a perspectiva axiomática de maneira fundamental: "Em todas as afirmações geométricas, deve ser possível trocar as palavras ponto, reta, plano por mesa, cadeira, caneca". Esse comentário é interpretado como a manifestação de uma inclinação para a desontologização da Matemática, concebendo-a como um conjunto de estruturas formais. No entanto, vale destacar que a Matemática se diferencia da Lógica justamente pelo fato de possuir objetos pertencentes a um mundo modelizado, suscetível a alterações conforme necessário.

> Qualquer teoria formal tem várias aplicações pretendidas ou modelos não isomórficos, e o que os axiomas descrevem são conceitos ou classes de objetos, ao invés de objetos particulares. A esse respeito, os axiomas matemáticos assemelham-se às leis naturais. E, tal como estes últimos, necessitam ser complementados por uma indicação no domínio dos objetos a que se aplicam. Uma teoria Matemática deve ser concebida como um par constituído por um sistema de axiomas, ou seja, uma estrutura sintática juntamente com um conjunto de modelos ou aplicações pretendidas (Santana, 2019, p.146).

A partir do formalismo, a Matemática é concebida como um sistema formal que se origina de axiomas e termos primitivos, não admitindo ultrapassar seus próprios limites. Entretanto, em 1930, Kurt Friedrich Gödel (1906–1978) apresentou o teorema da incompletude, destacando a impossibilidade de alcançar certeza absoluta na Matemática por meio de qualquer método fundamentado na lógica tradicional. Segundo Gödel, "[...] qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a sua própria consistência" (*apud* Davis; Hersh, 1988, p. 56). Diante dessas ponderações, Ponte *et al.* (2000) afirmam que os resultados obtidos por Gödel revelaram a impossibilidade de realizar o projeto de Hilbert, indicando que os objetivos almejados com o formalismo não eram atingíveis.

Entretanto, ao mencionar a escola de Hilbert, Waerden (1949, p. ix) expressa que:

> A recente expansão da Álgebra muito além de seus limites anteriores deve-se principalmente à escola abstrata, formal ou axiomática. Esta escola criou uma série de novos conceitos, revelou uma inter-relação até então desconhecida, e levou a resultados de longo alcance, especialmente nas teorias dos corpos, ideais, grupos e números hipercomplexos (tradução nossa).

Neste contexto é possível constatar a contribuição significativa da escola abstrata, formal ou axiomática, liderada por Hilbert. Waerden (1949) lembra que a abordagem abstrata teve também um impacto profundo na evolução e no enriquecimento da Álgebra, estendendo seus limites além do que era conhecido anteriormente.

A corrente formalista marcou uma era na busca por fundamentos matemáticos sólidos e livres de contradições. Os desafios apresentados pelo teorema da incompletude de Gödel questionaram as expectativas do formalismo em alcançar certeza absoluta na Matemática. A despeito dessas limitações, a escola abstrata, formal ou axiomática, liderada por Hilbert, desempenhou um papel crucial na expansão da Álgebra, introduzindo novos conceitos e revelando inter-relações anteriormente desconhecidas.

Análise Comparativa das Correntes Filosóficas

É crucial considerar que, embora o logicismo, o intuicionismo e o formalismo não tenham plenamente fornecido uma fundamentação à Matemática, os reflexos de suas contribuições ainda são claramente percebidos em publicações relacionadas ao tema. Os axiomas passam a ser concebidos como hipóteses cujas consequências precisam ser desenvolvidas, contrastando com a visão de Russell ou Frege, para quem os axiomas precisam ser verdadeiras declarações, não meramente formando sistemas consistentes de proposições formais.

Conforme expresso por Russell, “A primeira coisa que me parece necessária é chegar a um entendimento sobre as expressões explicação, definição e axioma, em que se diverge fortemente do que me é familiar, bem como do que é habitual.” (PMC, 38, *apud* Beaney, 2006, p. 64, tradução nossa). Essa convicção levou Frege à sua principal crítica ao método axiomático moderno, comparando a axiomática de Hilbert a um sistema de equações com várias incógnitas, onde a clareza e, especialmente, a singularidade na determinação do desconhecido permanecem duvidosas (Frege *apud* Antonelli; May, 2000). A visão de Frege elimina a possibilidade de analisar um contexto desconhecido em termos de estruturas formais, desenvolver consequências de hipóteses e conjecturas, e, finalmente, testar as consequências derivadas, um procedimento caracterizado por uma interação entre sentido e referência, ou sintaxe e semântica, que está ausente na perspectiva de Frege.

Friedrich Waismann (1896-1959), um dos principais membros do Círculo de Viena, acrescenta à discussão afirmando que, para Frege, formalistas não conseguem explicar ou reconhecer a aplicabilidade de uma teoria Matemática. Waismann compara a crítica de Frege à aplicação do movimento no jogo de xadrez, argumentando que as fórmulas da teoria Matemática expressam pensamentos, diferentemente do que Frege acreditava.

> Ele não pode fazer isso porque para ele as fórmulas da teoria não expressam pensamentos. Frege pergunta: 'Por que não se pode fazer uma aplicação de um movimento no jogo de xadrez? Obviamente, porque não expressa pensamentos. Porque se pode fazer aplicações de equações aritméticas. Só porque expressam pensamentos (Waismann, 1970, p. 214, tradução nossa).

Esse debate ressalta a complexidade da relação entre lógica e realidade, evidenciando que mesmo pensadores como Russell, Peano e Hilbert não conseguiram definir completamente o que é um número. A discussão culmina em duas ideias fundamentais – o fundamentalismo e a abordagem axiomática –, que se mostram frutíferas quando vistas sob a perspectiva da Complementaridade, especialmente no sentido da Complementaridade entre as intenções (conceitos) e as extensões (objetos) dos símbolos.

Apesar de o logicismo, o intuicionismo e o formalismo não terem logrado êxito em oferecer uma fundamentação plena à Matemática, os impactos de suas contribuições ainda são claramente perceptíveis em publicações que abordam temas relacionados à Matemática.

Para realizar a análise comparativa das abordagens de Guénon (1946), Caraça (1951) e Costa (1981) em relação ao conceito de limite, foi elaborado o Quadro 1 com base nas obras de Abbagnano (2017) e Ponte *et al.* (2000). Essa ferramenta, contudo, não tem o propósito de engessar ou predeterminar as correntes filosóficas, uma vez que ao longo do tempo elas têm recebido constantes modificações em consonância com a evolução da ciência. Mesmo filósofos da Matemática, como Frege e Russell, apesar de serem categorizados como lógicos, apresentam pensamentos divergentes em relação à lógica Matemática. Portanto, a função desse quadro é fornecer uma perspectiva de compreensão e não rigidificar ou categorizar excessivamente as correntes filosóficas, nem as teorias que apresentam, nem as obras analisadas.

Quadro 1: Características filosóficas das correntes em análise comparativa

	Características do Pensamento	**Papel**
Logicismo	Raciocínio lógico dedutivo; Análise lógica profunda dos conceitos matemáticos.	Vista como base e estrutura subjacente da Matemática.
Intuicionismo	Ênfase na intuição Matemática; Construção ativa de conceitos.	Fonte válida de conhecimento matemático.
Formalismo	Ênfase na manipulação formal de símbolos; Distância entre símbolos e interpretação.	Validade na correção da manipulação formal, independentemente de interpretação.

Fonte: elaborada pelos autores, 2023**.**

Foi produzido o Quadro 2 para evidenciar as principais discrepâncias e afinidades entre as correntes filosóficas examinadas. Destaca-se a intenção de ressaltar que, apesar da marcante diversidade nas três perspectivas, existem pontos convergentes e objetivos similares, especialmente na busca pelo aprimoramento e evolução contínua da Matemática de maneira abrangente.

Quadro 2: Traços filosóficos: diferenças e similaridades

<table>
<tr><th></th><th>Logicismo</th><th>Intuicionismo</th><th>Formalismo</th></tr>
<tr><td>Diferenças</td><td>Confiança na lógica formal</td><td>Ênfase na construção ativa e intuição</td><td>Foco na manipulação formal sem preocupação com interpretação</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Similaridades</td><td colspan="3">Busca de rigor e precisão;</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo de estabelecer uma base sólida para a Matemática.</td></tr>
</table>

Fonte: elaborada pelos autores, 2023**.**

É evidente que os resultados podem ser reorganizados quando examinados à luz de outras referências teóricas. No entanto, o foco principal consiste em adentrar de maneira concisa nessa discussão, estimulando a reflexão e a análise crítica das abordagens e trajetórias seguidas pelos referidos autores. Essa perspectiva busca, de igual modo, instigar os professores a ponderarem sobre suas próprias práticas e posturas ao conduzirem suas aulas.

Em síntese, os Quadros 1 e 2 foram elaborados com o propósito de organizar as categorias das correntes filosóficas de Guénon (2007), Caraça (1951) e Costa (1981) em relação ao conceito de limite, tomando como base teórica Abbagnano (2017) e Ponte *et al.* (2000). Essas ferramentas visam destacar as características distintas dessas correntes, sem a intenção de categorizá-las de maneira rígida, proporcionando uma compreensão inicial das diferenças e similaridades.

METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho adota uma abordagem metodológica da pesquisa qualitativa e se define como pesquisa documental. Fiorentini e Lorenzato (2009) apontam três tipos de estudos possíveis neste tipo de pesquisa: a meta-análise, os estudos do estado da arte e os estudos tipicamente históricos. Conforme Fiorentini e Lorenzato (2009), os estudos tipicamente históricos analisam textos impressos, manuscritos e outros documentos originais, fontes primárias. A análise documental "[...] pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja completando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema" (Lüdke e André, 1986, p. 38).

Com o objetivo de analisar e comparar como as concepções filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo interpretam e aplicam o conceito de limite na Matemática, optou-se por analisar as obras de Caraça (1951), Costa (1981) e Guénon (1946), apresentadas no Quadro 3, devido à sua relevância e representatividade no campo da Matemática e Filosofia da Matemática.

Quadro 3: Obras analisadas

Obra	Autor	Ano
Conceitos fundamentais da Matemática	Bento de Jesus Caraça	1951
As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios	Manuel Amoroso Costa	1981
Los principios del cálculo infinitesimal	René Guénon	1946

Fonte: acervo da pesquisa, 2023**.**

Essas obras foram escolhidas por oferecerem perspectivas únicas e influentes sobre o conceito de limite, refletindo as diferentes abordagens filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo. A autoridade dos autores selecionados no campo assegura um fundamento sólido para a análise, enquanto a diversidade de perspectivas proporciona uma análise comparativa rica. Além disso, a cobertura temporal dessas obras permite examinar a evolução do pensamento em torno do conceito de limite, garantindo que a análise seja focada e diretamente aplicável à questão de pesquisa sobre como diferentes filosofias interpretam e aplicam este conceito matemático fundamental.

Para identificação das pistas para realização da análise, foram tomadas as definições de logicismo, intuicionismo e formalismo principalmente a partir de Abbagnano (2007) e Ponte *et al.* (2000). As análises das obras inspiram-se no método da análise de conteúdo, a qual se constitui de um conjunto de técnicas de pesquisa com vistas a busca de sentido(s) de documentos (Bardin, 2016). O objetivo da análise documental é a representação condensada da informação para evidenciar os indicadores que permitam inferir sobre uma outra realidade que não a da mensagem.

CORRENTES FILOSÓFICAS RELACIONADAS AO CONCEITO DE LIMITE

Análise epistemológica em René Guénon (1946)

O filósofo francês René Guénon (1886-1951) publicou a obra *Les Principes du Calcul Infinitésimal* em 1946, na qual são apresentados os reflexos negativos da filosofia moderna na Matemática. O autor resgata o significado simbólico dos números e da geometria, buscando compreender a verdadeira essência do cálculo infinitesimal. No presente estudo, considera-se a versão publicada em 2007.

No prefácio, Guénon (2007) faz uma crítica à exclusão do empirismo na produção do conhecimento científico, que leva a estendê-la ao excesso de logicismo e formalismo, que, no âmbito do cálculo, significa negar a própria prática que permitiu o seu desenvolvimento. Concernente ao conceito de limite, deteve-se à análise do Capítulo XII da obra intitulado *La noción del limite* (p. 64-68) e do Capítulo XXIV, *Verdadera concepción del paso al limite* (p. 113-115). A noção intuitiva de limite apresentada por Guénon (2007, p. 64, tradução nossa), descrevendo o aspecto dinâmico presente neste conceito, aponta para um posicionamento epistemológico intuicionista nesta obra:

> [...] você pode dizer que o limite de uma quantidade variável é outro valor considerado como fixo, quantidade na qual o valor variável é suposto aproximar-se, pelos valores que toma sucessivamente ao longo de sua variação, para diferir tão pouco quanto se queira, ou, em outros termos, até que a diferença desses dois valores se torne menor do que qualquer quantidade atribuível.

Ao observar o posicionamento logicista nos comentários de Russel (2006) quanto à noção de limite, foi verificada a oposição do pensamento de Guénon que considera o limite essencialmente como uma quantidade:

> Antigamente supunha-se que os infinitésimos estivessem envolvidos nos fundamentos desses assuntos, mas Weierstrass mostrou que isto é um erro: onde quer que se pensava ocorrerem infinitesimais, o que realmente ocorre é um conjunto de quantidades finitas que têm zero como limite [...] na realidade a noção de "limite" é puramente ordinal (p. 103).

Guénon (2007) explica que a lógica do "passo ao limite" está ligada a saber precisamente se a quantidade variável, que se aproxima de seu limite indefinidamente, e que, portanto, pode diferir dela tão pouco quanto desejado, de acordo com a definição de limite em si, pode realmente atingir esse limite, isto é, se o limite pode ser concebido como o último termo de uma variação contínua, o autor se posiciona afirmando que esta é uma solução inaceitável. Percebe-se que para a noção de limite o autor utiliza um encadeamento de ideias que se demonstra uma construção intuitiva deste conceito, como por exemplo:

> [...] ou não se alcança o limite, e então o cálculo infinitesimal não é mais que o menos grosseiro dos métodos de aproximação; ou sim se alcança o limite, e então se trata de um método que é verdadeiramente rigoroso. Mas temos visto que o limite, em razão de sua definição mesmo, não pode ser alcançado nunca exatamente pela variável; como, pois, teremos o direito de dizer que não obstante pode ser alcançado? Pode sê-lo precisamente, não no curso do cálculo, senão nos resultados, porque, nestes, não devem figurar mais do que quantidades fixas e determinadas, como o limite mesmo, e já não variáveis; por conseguinte, é a distinção das quantidades variáveis e das quantidades fixas, distinção ademais propriamente qualitativa, a que é, como já o dissemos, a única verdadeira justificativa do rigor do cálculo infinitesimal. (Guénon, 2007, p. 113, tradução nossa).

A Matemática, neste caso, tem sua origem no espírito, pois, segundo Ponte *et al.* (2000) não é a experiência nem a lógica que determina a coerência e aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição.

Análise epistemológica em Caraça (1951)

O livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de autoria do português Bento de Jesus Caraça (1901-1948) foi publicado em 1951 em Lisboa, Portugal. A obra não se limita a ser um escrito destinado apenas a iniciantes ou a requalificar especialistas; ela busca cativar tanto aqueles que estão começando quanto os que já possuem conhecimento matemático mais profundo, ambos buscando a singularidade (Caraça, 1951). Além de abordar conceitos fundamentais da Matemática, o texto objetiva transcender o âmbito da Matemática elementar, visando horizontes mais amplos. Dado que a Matemática é essencialmente composta por ideias, o referido livro se apresenta como um recurso valioso para suprir lacunas no conhecimento, proporcionando uma recompensa significativa quando utilizado em paralelo com o aprendizado adquirido ou que deveria ser adquirido em sala de aula.

A análise realizada teve como foco a seção *Conceito de Limite* que está localizada entre as página 226 e 254, que é constituinte da *Parte 3 – Continuidade* da referida obra. A seção está dividida em 18 seções (13 a 31), no entanto foi realizada a análise de 8 dessas seções (13 a 21), por serem suficientes para o cumprimento do objetivo desta pesquisa devido às demais seções serem relacionadas às propriedades de limite.

Na seção *13. Uma Sucessão de Comportamento Notável*, o autor introduz, por meio de exemplos que visam uma conclusão de forma intuitiva em que toma como base a sucessão numerável $2, 3/2 , 4/3 , 5/4 , 6/5 , \ldots , a_n = (n + 1)/n$, que não se trata evidentemente de uma sucessão infinitésima. No entanto, se for considerada a nova sucessão numerável $a_n = (n + 1)/n - 1 = 1/n$, chega-se à conclusão que a sucessão é notavelmente um infinitesimal. Em seguida, na seção *14. Outras sucessões de comportamento semelhante*, o autor apresenta outras sucessões semelhantes ao primeiro exemplo dado, como $1/2 , 2/3 , 3/4 , 4/5 , \ldots , a_n = n/n + 1$. Assim, apresenta traços do intuicionismo que, segundo Ponte *et al.* (2000), concebe o pensamento matemático como um processo de construção mental.

Em sequência, na seção *15. Significado Comum*, o autor apresenta uma reflexão em relação a análises realizadas com as sucessões numeráveis e traz a seguinte questão: há sucessões numeráveis a_n em relação a cada uma das quais existe um úmero L que está relacionado com a sucessão de modo tal que a diferença $a_n - L$ é infinitésima com $1/n$. Ainda nessa seção, o autor começa a introduzir a simbologia da linguagem propriamente Matemática, como $n > n_1 \rightarrow |a_n - L| < \delta$ e, ainda, $n > n_1 \rightarrow L - \delta < a_n < L + \delta$. Assim, é perceptível uma transição do intuicionismo para a introdução do formalismo, ainda sob algumas representações por meio de figuras.

Na próxima seção, *16. Primeira Definição de Limite*, Caraça (1951, p. 231) evidencia traços do formalismo ao indicar que "[...] convém fixar, por uma linguagem simples, o comportamento de sucessões tais como as que acabamos de estudar". Assim há o uso, convergente ao que indica Ponte *et al.* (2000, p. 19), de "[...] uma linguagem formal e regras formais de inferência em número suficiente para que [...] pudesse ser representado por uma dedução formal com cada passo mecanicamente verificável".

Assim, Caraça (1945, p. 231) apresenta a Definição III: Diz-se que a sucessão numerável a_n tem por limite o número L, quando n tende para infinito, e escreve-se

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

quando a diferença $a_n - L +$ é infinitésima com $1/n$. E que, na prática e conforme for mais conveniente, o autor substitui as expressões explicitadas nas seções 13 e 14. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Nas seções 17, *A Noção de Limite Conceito de Interdependência*, e 18, *Maneiras de dizer*, o autor retoma o enfoque intuicionista, sem desconsiderar o formalismo. Essas seções são caracterizadas pela abordagem intuitiva da noção de limite e pela exploração da vizinhança do infinito. A pronúncia da relação estabelecida na primeira definição de limite é delineada de maneira a destacar tanto o aspecto intuitivo quanto as nuances formais.

Na abordagem das seções *19. A operação de passagem ao limite* e *20. Outro comportamento possível*, Caraça (1951, p. 234-235) destaca que "[...] estas maneiras de dizer são essencialmente dinâmicas – fazemos tender, passamos – indicativas duma atitude de espírito muito diferente da simples consideração estática dos termos da sucessão". O autor exemplifica com algumas sucessões numéricas, como $2,4,8,\ldots;\ a_n = 2^n$, destacando que, quando n tende ao infinito, a sequência pode não se aproximar de nenhum número específico, como é o caso do número 2, "[...] em linguagem sugestiva podemos dizer que esta sucessão é tal que, quando n se avizinha de infinito, a_n se avizinha também de infinito" (p. 235). Ponte *et al.* (2000) caracterizam essas abordagens como intuicionistas, originárias do espírito humano e sem existência fora desse domínio mental.

Caraça (1951), na seção 21, *Segunda Definição de Limite*, apresenta duas definições complementares à primeira, estendendo o conceito de limite à vizinhança do infinito. Definição IV e V afirmam que uma sucessão numerável a_n possui um limite mais-infinito (ou menos-infinito) quando n tende para infinito, expresso como: "[...] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$ quando a todo o número positivo Δ (negativo $-\Delta$) se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que $n > n_1 \to a_n > \Delta$ $(n > n_1 \to a_n < -\Delta)$." (p.235)

A utilização dos símbolos e a linguagem na abordagem de Caraça (1951) se aproximam um pouco do logicismo. A preocupação com quantidades nos remete à Russel (2006):

> Costumava dizer-se que a Matemática é a ciência da "quantidade". "Quantidade" é uma palavra vaga, mas, para argumentar, podemos substitui-la pela palavra "número". A afirmação de que a Matemática é a ciência do número seria inverídica de dois modos diferentes. Por um lado, há ramos reconhecidos da Matemática que nada têm a ver com o número — toda a geometria que não usa coordenadas ou medição, por exemplo: a geometria projectiva e descritiva, até ao ponto em que são introduzidas coordenadas, nada tem a ver com número, ou mesmo com quantidade, no sentido de maior e menor. (p. 191-192)

Torna-se evidente que o autor fundamenta seu pensamento predominantemente em uma perspectiva intuicionista. Entretanto, em momentos específicos, é possível caracterizar seu pensamento sob uma perspectiva formalista e logicista.

Análise epistemológica em Amoroso Costa (1981)

Manoel Amoroso Costa (1885-1928), nascido no Rio de Janeiro, tem como sua principal obra *As idéias fundamentais da Matemática*, publicada em 1929 e reeditada em 1981. É um compêndio que reúne suas conferências e cursos ministrados. Foi o primeiro livro publicado em língua portuguesa, no Brasil, que dialoga sobre a Filosofia da Matemática.

Discutiu temas pouco explorados em sua época como: o que é a descoberta Matemática? O que significa demonstrar? O que é definição? O que é rigor? Além de tratar sobre assuntos atuais para a época, tal como os fundamentos da Geometria com as formalizações de Pasch, Veblen e Hilbert para a Geometria, Geometrias não-euclidianas e o problema da dimensionalidade. O objetivo da obra, segundo as palavras do próprio autor, era "[...] expor em traços gerais a concepção atual da Matemática pura, fruto, em grande parte, do trabalho crítico realizado nos últimos cinquenta anos. [...] mostrar como se apresentam, hoje em dia, o seu método e as suas diretrizes" (Costa, l981, p. 177)

Neste texto, focou-se na discussão sobre o capítulo XI, intitulado *As noções de Variável e Limite*, especificamente a secção 57. *A Noção de Limite*. Para tanto, Costa (1981) apresenta um breve esboço histórico sobre a noção de limite desde Eudoxio relacionado ao método da exaustão, os infinitésimos pequenos de Leibniz, e destaca que para Wallis, nos séculos XVII e XVIII, a noção de limite não se desprende da intuição espacial, chegando até Cauchy que define um número irracional como limite de uma sequência de números racionais. Em seguida, apresenta a definição para a noção de variável:

> 57. A noção de limite. — Devemos agora introduzir a noção extremamente importante de limite, que se prende à de variável. Suponhamos que o domínio de uma variável x é um conjunto linearmente ordenado C. Chamemos segmento de C a todo o conjunto cujos elementos se acham situados entre dois elementos dados de C. Seja C' um conjunto linearmente ordenado, do qual C é parte integrante. Se a é um elemento de C', chama-se vizinhança de a todo o segmento de C tal que a esteja compreendido entre dois elementos quaisquer desse segmento. Diz-se então que a é um elemento-limite do conjunto C, se na vizinhança de a, por pequena que seja, existem elementos de C, podendo acontecer que também a pertença a C. Em outros termos, a é um elemento-limite de C, quando todo o segmento contendo a contém uma infinidade de elementos de C. Como caso particular, vejamos o que se entende por limite de uma seqüência infinita de números
> $$a_1, a_2, \cdots, a_v \cdots$$
> Diz-se que tal seqüência admite um limite a (ou que a tende para a, quando o inteiro v cresce indefinidamente), se, quaisquer que sejam os números a' e a'', satisfazendo as desigualdades
> $$a' < a < a'',$$
> existe um inteiro n tal que a condição v > n implica
> $$a' < a_v < a''.$$
> Para exprimir esse fato, escreve-se:
> $$a = \lim_{v=\infty} a_v$$
> A variável x, cujo domínio é a seqüência considerada, tende, pois, para o limite a, se a diferença $x - a$, a partir de um certo valor do índice v, é inferior em valor absoluto a um número positivo ε, tão pequeno quanto se queira. Demonstra-se que a existência e o valor do limite a não dependem da ordem em que se consideram os valores da variável. A noção de limite generaliza-se no caso em que a é infinito. 'Dizer que se tem $a = +\infty$, equivale a dizer, seja qual for a', existe um número n tal que, para $v > n$, se tem $a' < a_v$. (Costa, 1981, p. 259)

O texto de Costa (Ibid.) não apresenta um caráter excessivo em relação ao simbolismo. Neste aspecto, não foi visualizada a presença da lógica simbólica e representativa. Contudo, existe um encadeamento, uma ordem, ou seja, uma construção quando o autor estabelece as premissas que uma após a outra tece a construção. Como por exemplo neste trecho: "Suponhamos que o domínio de uma variável $\boldsymbol{x}$ é um conjunto linearmente ordenado $\boldsymbol{C}$. Chamemos segmento de $\boldsymbol{C}$ a todo o conjunto cujos elementos se acham situados entre dois elementos dados de $\boldsymbol{C}$ [...]" (Costa, 1981, p. 259).

Antes de apresentar a noção de limite, o autor se preocupa em apresentar a noção de variável. Contudo, esse formato de construção não se estende pelo resto do texto, do mesmo modo como se configura o trabalho do intuicionismo na perspectiva da construção. O texto também é marcado pela ausência do simbolismo excessivo, assim é possível perceber um ensaio intuicionista em relação à escrita. Costa (1981) também não apresenta um "jogo linguístico", todavia aflora a conspecção da hipótese ao considerar e utilizar a palavra "suponha" nas hipóteses, porém não tem a pretensão de descrever uma demonstração formal. Não faz uso da representação geométrica, diagramas e imagem mental.

Comparação das abordagens de Guénon, Caraça e Costa sobre o conceito de limite

As abordagens de Guénon, Caraça e Costa sobre o conceito de limite revelam tanto aproximações quanto distanciamentos nas suas perspectivas filosóficas e metodológicas. Cada um deles, ao abordar o conceito de limite, traz uma visão única que reflete sua compreensão filosófica e epistemológica da Matemática.

Em termos de aproximações, um aspecto comum entre Guénon e Caraça é a ênfase na natureza intuitiva do conceito de limite. Eles se concentram na compreensão abstrata e na representação mental dos limites, destacando a importância da intuição na Matemática. Costa, embora não seja tão explícito quanto os outros dois, também sugere uma abordagem que valoriza o entendimento conceitual em detrimento de um enfoque puramente simbólico e formalista. Além disso, tanto Guénon quanto Caraça são críticos do formalismo excessivo na Matemática, argumentando que isso pode obscurecer o verdadeiro entendimento dos conceitos matemáticos. Costa, por sua vez, mantém uma abordagem menos formalista, embora não adote uma posição crítica tão explícita quanto Guénon.

No que diz respeito aos distanciamentos, esses autores divergem significativamente em suas abordagens epistemológicas. Guénon adota uma postura mais filosófica e simbólica, criticando a exclusão do empirismo e o excesso de formalismo. Caraça, em contraste, parece navegar entre o intuicionismo, logicismo e formalismo, integrando elementos das três correntes em sua abordagem. Costa foca mais na construção conceitual do limite, sem se posicionar explicitamente sobre o papel da lógica na Matemática.

Outro ponto de divergência está no uso do simbolismo matemático. Enquanto Caraça e Costa utilizam simbologia e formalização em suas explicações, Guénon opta por uma abordagem menos dependente da linguagem simbólica Matemática, enfatizando uma perspectiva mais filosófica. Além disso, enquanto Guénon se concentra mais na filosofia e na história da Matemática, Caraça e Costa abordam a Matemática mais como uma disciplina educacional e prática, embora também considerem aspectos históricos e filosóficos.

A comparação das abordagens de Guénon, Caraça e Costa sobre o conceito de limite oferece uma visão rica e diversificada das diferentes maneiras pelas quais a Matemática pode ser compreendida e ensinada. Enquanto compartilham algumas semelhanças em suas críticas ao formalismo e valorização da intuição, suas diferenças epistemológicas e metodológicas revelam a pluralidade de perspectivas dentro do campo da Filosofia da Matemática.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Este artigo teve como objetivo analisar e comparar como as concepções filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo interpretam e aplicam o conceito de limite na Matemática. Através da análise das obras de três autores, Guénon, Caraça e Costa, foi possível observar as nuances e complexidades dessas abordagens filosóficas, destacando tanto suas convergências quanto divergências. Enquanto Guénon enfatiza uma perspectiva crítica ao formalismo e empirismo, privilegiando uma abordagem mais simbólica e intuitiva, Caraça e Costa apresentam um equilíbrio entre intuição e formalismo, com uma inclinação para a aplicação prática e pedagógica da Matemática.

É importante reconhecer as limitações desta pesquisa. Por motivo de extensão textual, a análise foi restrita a três autores e suas obras específicas, o que pode representar toda diversidade de pensamentos e interpretações existentes dentro das escolas filosóficas do logicismo, intuicionismo e formalismo. Ainda assim, acredita-se que esta pesquisa contribui para o campo da Filosofia da Matemática ao proporcionar uma visão comparativa das diferentes abordagens filosóficas no conceito de limite. Ao destacar as nuances de cada abordagem, o estudo oferece uma compreensão mais rica de como a Matemática pode ser vista não apenas como uma ciência de números e fórmulas, mas também como um campo de expressão de ideias filosóficas profundas. Além disso, ao explorar as inter-relações entre Filosofia e Matemática, esta pesquisa enfatiza a importância de considerar as perspectivas filosóficas na educação e prática Matemática.

Para estudos futuros, duas possibilidades emergem como particularmente promissoras. Primeiro, uma análise mais abrangente incluindo uma gama maior de autores e obras poderia fornecer um panorama mais completo das diversas interpretações filosóficas do conceito de limite. Isso ajudaria a entender como diferentes culturas e períodos históricos influenciaram a Filosofia da Matemática. Segundo, seria enriquecedor explorar como as abordagens filosóficas discutidas impactam o ensino e a aprendizagem de Matemática na prática educacional contemporânea. Tal estudo poderia fornecer *insights* sobre como integrar essas perspectivas filosóficas em métodos de ensino de Matemática para enriquecer a compreensão dos alunos e estimular um pensamento matemático.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 5 Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ANTONELLI, A.; MAY, R. Frege's New Science. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, Durham, v. 41, n. 3, p. 242–67, jan. 2000.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3ª Reimp. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo, Edições 70, 2016.

BEANEY, M. Frege and the Role of Historical Elucidation: Methodology and the Foundations of Mathematics. *In:* FERREIRÓS, J.; GRAY, J. (ed.). **The architecture of modern mathematics**: essays in history and philosophy. NewYork: Oxford University Press, 2006. p. 47-66.

CARAÇA. B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: 1951.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. 3 Ed. São Paulo: Convívio, 1981.

DAVIS, P.; HERSH, R. Da certeza à falibilidade. *In:* **A Natureza da Matemática, cadernos de educação e Matemática**, v. 1. Lisboa: APM, 1988. p. 45-72.

FERREIRA, F. Logicismo. *In:* BRANQUINHO, J.; SANTOS, R. **Compêndio em linha de problemas de filosofia analítica**. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2014.

FERREIRÓS, J.; GRAY, J. (ed.). **The architecture of modern mathematics**: essays in history and philosophy. NewYork: Oxford University Press, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3 Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

FREGE, G. **Os Fundamentos da aritmética**. Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Coleção Os Pensadores). Disponível em: https://marcosfabionuva.files.wordpress.com/2011/08/os-fundamentos-da-aritmc3a9tica.pdf. Acesso em: 20 nov. 2023.

GUÉNON, R. **Les Principes du Calcul infinitésimal**. Paris: Gallimard, 1946.

GUÉNON, R. **Los principios del cálculo infinitesimal**. Madrid: Editora Sanz y Torres, 2007.

HILBERT, D. The foundations of mathematics. *In:* Heijenoort, V. From Frege to Gödel: **A Source Book Mathematical logic 1879-1931**. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971, pp. 464-479.

JAPIASSÚ, H. **Dicionário básico de filosofia**. Zahar, 2001.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo, SP: Editora Pedagógica e Universitária, 1986. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4091392/mod_resource/content/1/Lud_And_cap3.pdf. Acesso em: 20 de nov de 2023.

MENEGHETTI, R. C. G. Logicismo, Formalismo e Intuicionismo: análise de seus pressupostos. *In:* **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, ENEM, Rio de Janeiro-RJ, 2001. p.1-9. Disponível em: GT_13.pdf. Acesso em: 18 de nov de 2023.

MUTTI, G. de S. L. *et al*. O logicismo, intuicionismo e formalismo nas licenciaturas em Matemática das universidades públicas paranaenses. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 313-334, 2019. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p313-334

PONTE, J. P. da; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M. ABRANTES, P. **Didática da Matemática**. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, 2000.

REID, C. Hilbert. New York: **Springer,** Verlag, 1970.

RUSSEL, B. **Introdução à filosofia Matemática**. Edição e tradução de Augusto J. Franco de Oliveira (CEHFC/UE). Rio de Janeiro: Zahar, 2006.

SANTANA, G. F. da S. **A Complementaridade entre sentido e referência dos símbolos da Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e em Matemática) – PPGECEM/ REAMEC, UFMT, Cuiabá, 2019.

WAERDEN, B. L. **Modern Algebra**: in part a development from lectures by E. Artin and E. Noether. Vol. 1. New York: Frederick Ungar Publishing Co, 1949.

WAISMANN, F. **Einführung in das mathematische Denken**. Wien: Gerold & Co. 1936, 3. von Friedrich Kur durchgesehene Aufl. München: dtv 1970.

Submetido em 04 de dezembro de 2023.
Aprovado em 17 de abril de 2024.